

4-ДӘРІС



Асқарұлы Қыдыр
PhD., қауымдастырылған профессор

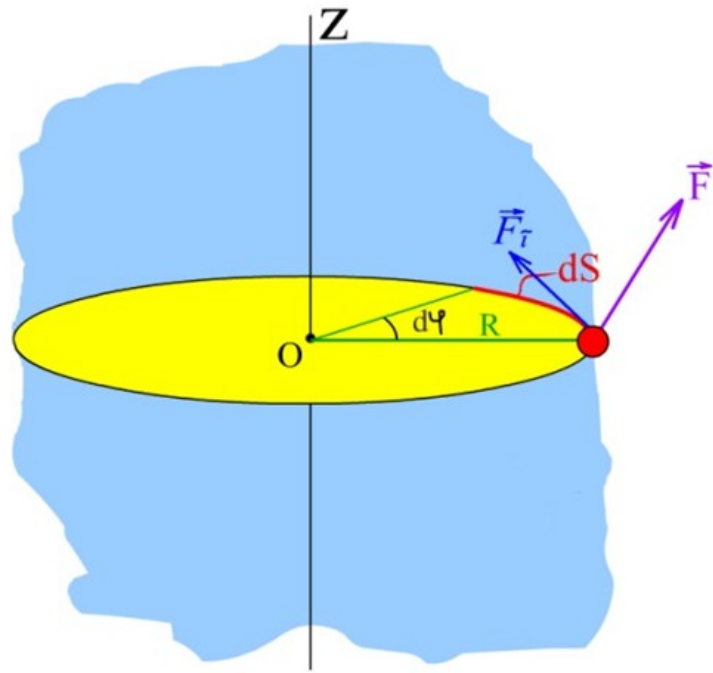
4.1 Айналмалы қозғалыстағы дененің жұмысы және кинетикалық энергиясы

Қатты денеге \vec{F} күші әсер етсін. Жоғарыда Z осьіне байланысты әсер етуші \vec{F} күштің дене қозғалыс траекториясына жанама құраушысы \vec{F}_Z қана айналдырушы момент тудыратынын көрсеткен едік. Өте кіші dt уақыт ішінде дене шексіз кіші $d\varphi$ бұрышқа бұрылады. Күш түскен нүкте $dS = R \cdot d\varphi$ жолға ығысады (4.1-сур.). Күштің \vec{F}_Z құраушысы dS доғаға жанама бойынша болып, оның жұмысы мына өрнекпен анықталады.

$$\delta A = F_\tau \cdot dS = F_\tau R \cdot d\varphi = M_Z \cdot d\varphi. \quad (4.1)$$

Айналмалы дененің кинетикалық энергиясы оның бөлшектерінің кинетикалық энергияларының қосындысына тең және ($v_i = R_i \cdot \omega$) өрнекті ескеріп, энергия үшін мына теңдеуді жазуға болады:

$$E_\kappa = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot \omega^2}{2} R_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot R_i^2 = \frac{J_Z \cdot \omega^2}{2} \quad (4.2)$$



4.1-сурет. Айналуды дененің жұмыс анықтамасы

Дененің жазықтық бойынша қозғалысы кезінде, мысалға цилиндрдің ілгерілемелі кинетикалық энергиясы және айналмалы қозғалыс энергиясы қосылады:

$$E_K = \frac{m \cdot v_C^2}{2} + \frac{J_C \cdot \omega^2}{2}, \quad (4.3)$$

m – айналушы дененің массасы;

v_C – дененің массалар центрінің жылдамдығы;

J_C – массалық центрі арқылы өтетін оське қатысты дененің инерция моменті, ω – айналу бұрыштық жылдамдығы.

4.2 Қатты дененің айналмалы қозғалыс динамикасының негізгі теңдеуі

Айналмалы қозғалыста $\vec{F}^{\text{сырты}}$ күштің әсерінен дененің $d\varphi$ бұрышына бұрылуы кезіндегі күш жұмысы (4.1) оның кинетикалық энергиясының (4.2) артуына әкеліп соғады:

$$\delta A = dE_k, \quad M_Z^{\text{сырты}} \cdot d\varphi = d\left(\frac{J_Z \cdot \omega^2}{2}\right) = J_Z \omega \cdot d\omega$$

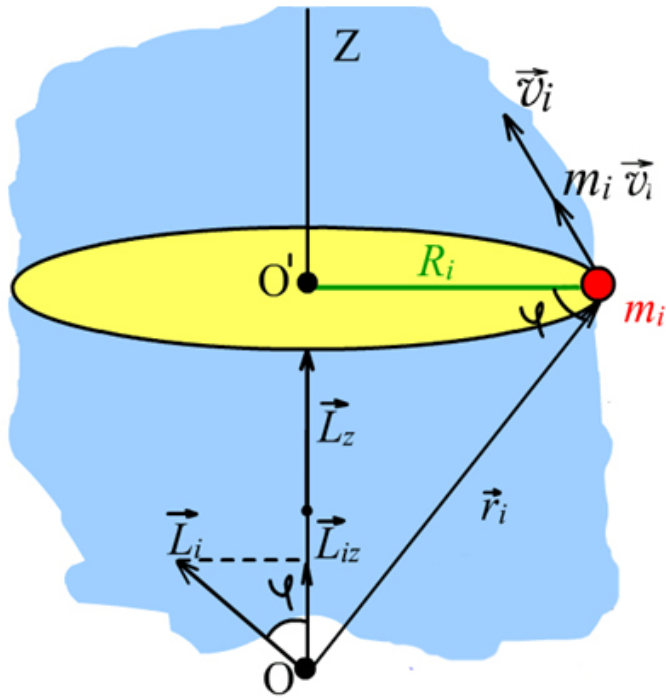
немесе
$$M_Z^{\text{сырты}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = J_Z \omega \frac{d\omega}{dt} = J_Z \frac{d\varphi}{dt} \varepsilon.$$

$$M_Z^{\text{сырты}} = J_Z \cdot \varepsilon \quad \text{немесе} \quad \varepsilon = \frac{\vec{M}_Z^{\text{сырты}}}{J_Z} \quad (4.4)$$

Қатты дененің айналмалы қозғалыс динамикасының негізгі теңдеуі: *айналушы дененің бұрыштық үдеуі денелерге түсірілген күш моменттерінің қосындысына тура пропорционал, ал дененің айналу осіне қатысты инерция моментіне кері пропорционал.* Келтірілген (4.4) өрнектен көретініміз айналу осіне қатысты дененің инерция моменті тұрақты болса ($\vec{M}_Z^{\text{сырты}} = const$), онда ($J_Z = const$) бұрыштық үдеу де тұрақты $\varepsilon = const$. Егер $\vec{M}_Z^{\text{сырты}} = 0$, онда $\varepsilon = 0$ - дене бірқалыпты айналады.

4.3 Импульс моменті және оның сақталу заңы

Массасы m_i қатты дененің кішкентай бөлшегін қарастырайық. Оның жылдамдығы \vec{v}_i және оған қатысты импульсі $\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$ нүкте траекториясына жанама бойымен бағытталған.



4.2-сурет. Импульс моментін анықтау

Қозғалмайтын O нүктесіне қатысты импульс моменті векторы \vec{L}_i материялық нүктенің радиус-векторы \vec{r}_i мен оның импульсінің \vec{p}_i векторлық көбейтіндісіне тең физикалық шама:

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \vec{p}_i \right] = \left[\vec{r}_i m_i \vec{v}_i \right]. \quad (4.5)$$

Импульс моменті векторы \vec{L}_i векторлық көбейтінді ережесі арқылы анықталып, айналу осі бойында жатады, ал оның модулі мына өрнекпен анықталады:

$$L_i = r_i \cdot m_i v_i. \quad (4.6)$$

Материялық нүктенің Z осіне қатысты импульс моменті векторы \vec{L}_{iZ} осы \vec{L}_i векторының айналу осіне түсірілген проекциясы арқылы анықталады. Ол айналу осінде жатыр және оның модулі мына теңдеу арқылы анықталады.

$$L_{iZ} = L_i \cos \varphi = r_i \cdot m_i v_i \cos \varphi = R_i \cdot m_i v_i .$$

(4.7)

Қатты дененің Z осіне қатысты \vec{L}_Z импульс моменті векторы барлық нүктелерінің \vec{L}_{iZ} векторларының қосындысына тең. Барлық векторлар айналу осінде жатыр және бірдей бағытталған. Олардың модулі мынаған тең.

$$L_Z = \sum_{i=1}^n m_i v_i R_i = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = J_Z \omega$$

(4.8)

(4.8) теңдігін векторлық түрде былай жазуға болады:

$$\vec{L}_Z = J_Z \cdot \vec{\omega} .$$

(4.9)

(4.9) уақыт бойынша дифференциалдап ($J_Z = const$) (4.4) мына өрнекті аламыз:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_z^{\text{сыртты}} . \quad (4.10)$$

Бұл қатты дененің айналмалы қозғалыс динамикасының негізгі заңының бір түрі: *ось бойымен қатты дененің айналу кезіндегі импульс моменті \vec{L}_z уақыт бойынша туындысы сол денеге әсер ететін сыртқы күштердің моментіне ($\vec{M}_z^{\text{сыртты}}$) тең.*

Соңғы теңдікті былай жазуға болады.

$$d\vec{L}_z = \vec{M}_z^{\text{сыртты}} \cdot dt \quad (4.11)$$

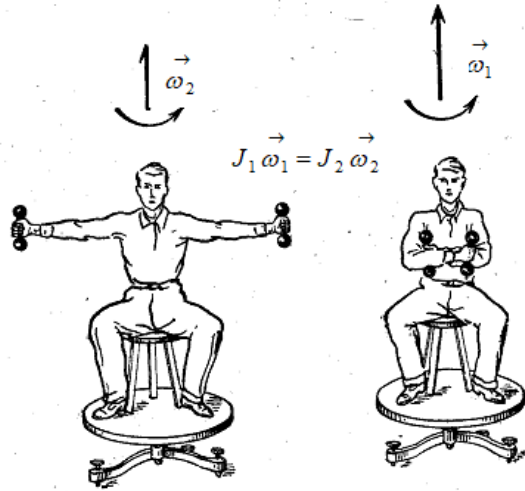
Айналушы дененің импульс моментінің өзгерісі оған әсер етуші сыртқы күштердің әсерінен болады.

Тұйық жүйеде сыртқы күштердің моменті $\vec{M}_z^{\text{нүдәуі}}$ нольге тең.

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = 0 \quad \text{және} \quad \vec{L}_z = \text{const} . \quad (4.12)$$

Бұл теңдік импульс моментінің сақталу заңын құрайды: *қозғалмайтын оське қатысты дененің импульс моменті тұйық жүйеде тұрақты болып, уақыт бойынша өзгермейді.*

Бұл тұжырым табиғаттың іргелі заңдарының бірі болып, кеңістіктің изотропты (барлық бағыттар тең құқықты) екендігінің салдары, яғни табиғатта оқшауланған бағыттың жоқ екендігін көрсетеді. Тұйық жүйенің бұрылуы оның механикалық қасиеттерін өзгерте алмайды.



$\vec{L}_Z = J_Z \cdot \vec{\omega}$, онда тұйық жүйе үшін теңдік

$$J_Z \cdot \vec{\omega} = const. \quad (4.13)$$

Егер дененің инерция моменті өзгермейтін болса, онда дене тұрақты бұрыштық жылдамдықпен қозғалыс жасайды ($J_Z = const$), ($\omega = const$). Егер J_Z шамасы өзгерсе, онда ω шамасы да өзгереді. Егер J_Z артса, онда ω

азаяды.

Импульс моментінің сақталу заңын Жуковскийдің тәжірибесінен көз жеткізуге болады (4.3-сурет).

4.3 Импульс моментінің сақталу заңын дәлелдеу

Өз осі бойынша шеңбердің қозғалысын қарастырайық. Кір көтерген адам қолын екі жаққа керіп ω_1 жылдамдықпен айналдырып отыр. Адамның инерция моменті J_1 тең. Адам жүкті айналу осыне жақындатқанда J_2 инерция моменті азаяды. Бұл бұрыштық жылдамдықтың артуына әкеліп соғады, яғни (4.13) теңдігі бойынша $\omega_2 > \omega_1$, және $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$.

4.1-кестеде дененің ілгерілемелі және айналмалы қозғалысының негізгі теңдеулері келтірілген.

4.1-кесте

Ілгерілемелі қозғалыс		Айналмалы қозғалыс	
Масса	m	Инерция моменті	$J = \sum_{i=1}^n m_i \cdot R_i^2$
Күш	\vec{F}	Күш моменті	$\vec{M} = \left[\vec{r} \vec{F} \right]; M = F \cdot l$ $\vec{M}_z = \left[\vec{R} \vec{F}_\tau \right]; M_z = F_\tau \cdot R$
Импульс	$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i$ $\vec{p} = m \cdot \vec{v}_c$	Импульс моменті	$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \vec{p}_i \right]$ $\vec{L}_z = \sum_{i=1}^n \left[\vec{R}_i \vec{p}_i \right];$ $\vec{L}_z = J_z \cdot \vec{\omega}$
Динамиканың негізгі теңдігі	$\vec{a} = \frac{\vec{F}^{\text{сырты}}}{m}$ $\vec{F}^{\text{сырты}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Динамиканың негізгі теңдіктері	$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_z^{\text{сырты}}}{J_z}$ $\vec{M}_z^{\text{сырты}} = \frac{d\vec{L}_z}{dt}$
Жұмыс	$\delta A = F_s \cdot dS$	Жұмыс	$\delta A = M_z \cdot d\varphi$
Кинетикалық энергия	$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$	Кинетикалық энергия	$E_k = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}$

Бақылау сұрақтары :

1. Қатты дененің, материялық нүктенің импульс моменті дегеніміз не?

Олардың бағыттары қалай анықталады?

2. Импульс моментінің сақталу заңын жазыңыз. Ол қандай жүйеде орындалады. Мысал келтір.

3. Дененің ішкі күші дененің импульс моментін өзгерте ала ма? Ішкі күштер жүйенің механикалық қозғалысын өзгерте ала ма?