

Поставка задачи. Проведение и обработка эксперимента

Сербин В.В., зав.кафедрой КОиХИ,
ассоциированный профессор,
кандидат технических наук,
профессор РАЕ

Формализованная постановка задачи

Постановка задачи

Деятельность любой системы можно характеризовать результатами ее работы. Наблюдая за изменением выбранного для наблюдения параметра, можно сделать общую оценку тенденции развития системы. Более того, установив связь между моментами времени наблюдений и динамикой изменения выбранного параметра, можно прогнозировать состояние системы в будущем.

Выяснение общей тенденции (*тренда*) развития системы предполагает построение математической модели на основе наблюдений за выбранным производственным показателем.

Пусть искомая математическая модель описывается формулой параболического тренда второй степени:

$$Y = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 .$$

Этапы решения:

Сбор исходной информации;

Преобразование таблицы исходной информации с целью получения системы уравнений (системы нормальных уравнений);

Решение системы нормальных уравнений и получение формулы искомого тренда;

Определение погрешностей моделирования и пригодности полученной модели;

Построение графиков изменения наблюдаемого параметра на основе формулы полученной модели (теоретические значения) и фактических значений с целью их визуального сравнения;

Использование полученной модели для прогнозирования состояния исследуемого производственного показателя на будущее.

1. Сбор исходной информации

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Уф	3,2	5	6	8,5	10	11	13	14	14,5	16

2. Получение системы нормальных уравнений

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum t + a_2 \cdot \sum t^2 = \sum Y_{\text{TM}} \\ a_0 \cdot \sum t + a_1 \cdot \sum t^2 + a_2 \cdot \sum t^3 = \sum Y_{\text{TM}} \cdot t \\ a_0 \cdot \sum t^2 + a_1 \cdot \sum t^3 + a_2 \cdot \sum t^4 = \sum Y_{\text{TM}} \cdot t^2 \end{cases}$$

где n — количество наблюдений (в данном случае $n = 10$).

$$\begin{cases} 10 \cdot a_0 + 55 \cdot a_1 + 385 \cdot a_2 = 101.2 \\ 55 \cdot a_0 + 385 \cdot a_1 + 3025 \cdot a_2 = 674.7 \\ 385 \cdot a_0 + 3025 \cdot a_1 + 25333 \cdot a_3 = 5166.7 \end{cases}$$

3. Решение системы нормальных уравнений

Итак, решив систему уравнений, находим искомые коэффициенты тренда:

$$a_0=1.055$$

$$a_1=2.027$$

$$a_2=-0.054$$

С учётом полученных значений коэффициентов, уравнение тренда будет иметь вид:

$$Y=1.055+2.027 \cdot t-0.054 \cdot t^2 .$$

4. Определение погрешностей моделирования

$$Y_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_{\phi}}{10} \quad Y_{cp} = 10.12;$$

t	Y _ф	Y _т	(Y _ф - Y _{ср}) ²	(Y _т - Y _{ср}) ²	(Y _ф - Y _т)	(Y _ф - Y _т) ²
1	3,2	3,028	47,886	50,293	0,171	0,029
2	5	4,893	26,214	27,321	0,106	0,011
3	6	6,649	16,974	12,044	-0,649	0,421
4	8,5	8,297	2,624	3,320	0,202	0,040
5	10	9,837	0,014	0,079	0,162	0,026
6	11	11,269	0,774	1,320	-0,269	0,072
7	13	12,592	8,294	6,112	0,407	0,166
8	14	13,807	15,054	13,594	0,192	0,037
9	14,5	14,913	19,184	22,978	-0,413	0,171
10	16	15,911	34,574	33,54516	0,088	0,007
		Сумма:	171,596	170,611	0	0,984

Совокупность исходных данных Y_f имеет 10 степеней свободы ($n=10$) — по числу наблюдений; совокупность расчётных данных Y_m имеет 3 степени свободы ($v=3$) — по числу коэффициентов в формуле модели; совокупность Y_{cp} имеет 1 степень свободы. Следовательно, совокупность $(Y_f - Y_{cp})$ имеет 9 степеней свободы, $(Y_m - Y_{cp})$ имеет 2 степени свободы, $(Y_f - Y_m)$ имеет 7 степеней свободы. Теперь можно определить дисперсии:

$$S^2_{Cucm} = \frac{\sum (Y_{\phi} - Y_{cp})^2}{9} \approx 19.066$$

$$S^2_{Mod} = \frac{\sum (Y_m - Y_{cp})^2}{2} \approx 85.305$$

$$S^2_{Ocm} = \frac{\sum (Y_{\phi} - Y_m)^2}{7} \approx 0.14$$

Абсолютная погрешность составит:

$$S_{Ocm} = \sqrt{S^2_{Ocm}} \approx 0.375;$$

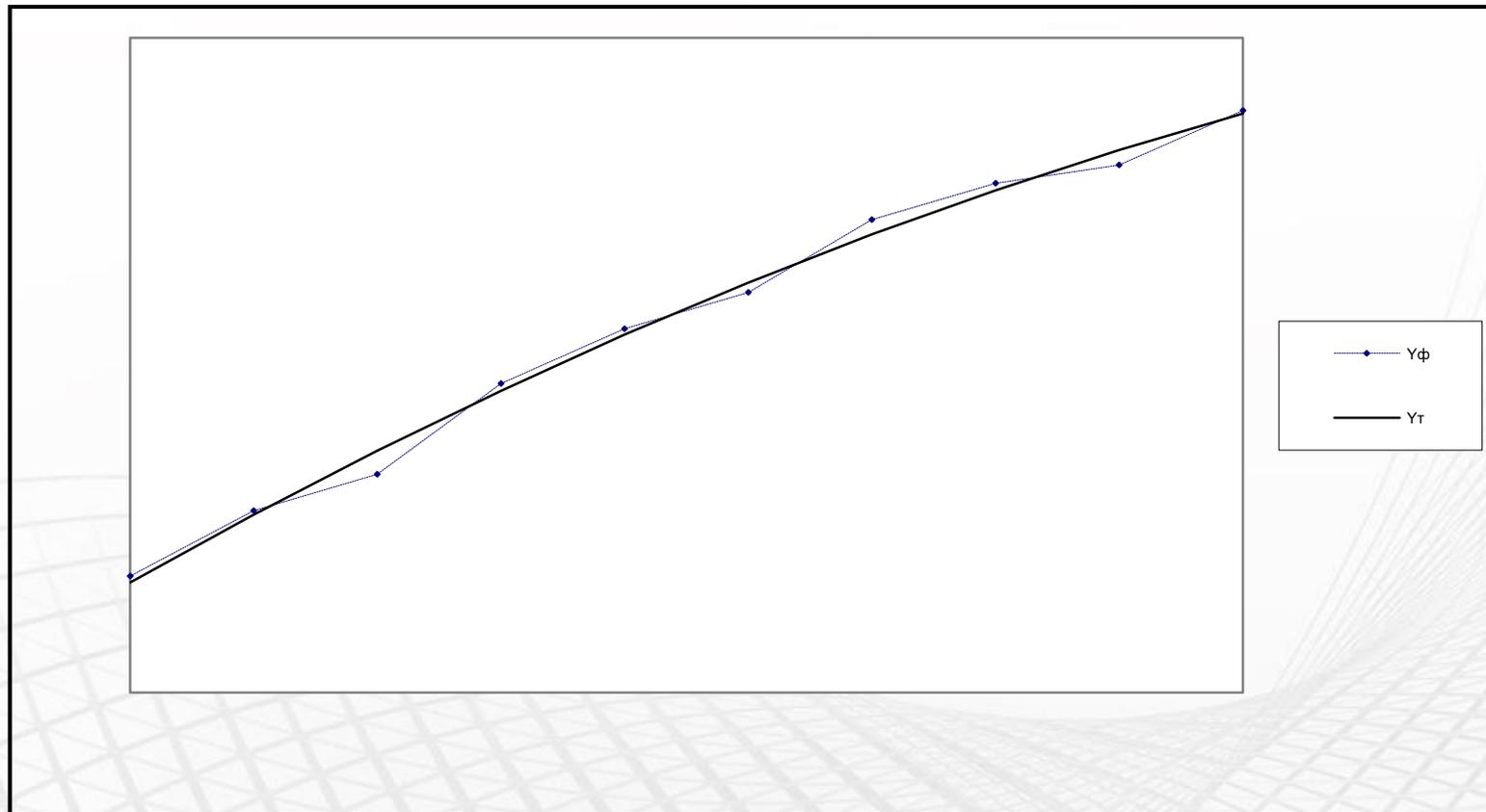
Коэффициент детерминации: $D = 1 - \frac{S^2_{Ocm}}{S^2_{Cист}} \approx 0.992;$

Индекс корреляции: $I = \sqrt{D} = \sqrt{0.992} = 0.996;$

Критерий Фишера: $F_{рас} = \frac{S^2_{M''ЛБ}}{S^2_{m-\square}} \approx 606.3.$

Вывод: Качество модели приемлемое, т.к. индекс корреляции больше 0,7 и расчётный критерий Фишера больше табличного для данного случая ($F_{таб} = 4,7$).

5. Построение графиков



6. Прогнозирование

$$Y = 1.055 + 2.027 \cdot t - 0.054 \cdot t^2.$$

$$\text{При } t=11 \quad Y = 1.055 + 2.027 \cdot 11 - 0.054 \cdot 11^2 \approx 16.8$$

$$\text{При } t=12 \quad Y = 1.055 + 2.027 \cdot 12 - 0.054 \cdot 12^2 \approx 17.6$$

$$k = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{(n+i)^2}{\sum t^2} + \frac{\sum t^4 - (2 \cdot \sum t^2) \cdot (n+i)^2 + (n+i)^4 \cdot n}{n \cdot \sum t^4 - (\sum t^2)^2}}{}}$$

где n — число наблюдений,

i — номер шага прогноза (в нашем случае принимает значения 1 и 2).

С учётом этого, можно переписать формулу прогноза.

При $n > 30$ $Y_{np} = Y \pm 2 \cdot S_{ост} \cdot k$

При $n < 30$ $Y_{np} = Y \pm \gamma_{\alpha} \cdot S_{ост} \cdot k$ (данный случай).

Выполняя вычисления, находим k : при $i=1$, $k \approx 1,45$, при $i=2$, $k \approx 1,6$.

Таким образом, окончательное прогнозирование параметра:

При $t=11$

$$Y_{np} = 1.055 + 2.027 \cdot 11 - 1.054 \cdot 11^2 \pm 2,23 \cdot 0,375 \cdot 1,45$$

$$15,59 \leq Y_{np} \leq 18,01$$

При $t=12$

$$Y_{np} = 1.055 + 2.027 \cdot 12 - 1.054 \cdot 12^2 \pm 2,23 \cdot 0,375 \cdot 1,6$$

$$16,24 \leq Y_{np} \leq 18,92$$

תודה
Dankie Gracias
Спасибо شکرًا
Merci Takk
Köszönjük Terima kasih
Grazie Dziękujemy Děkojame
Ďakujeme Vielen Dank Paldies
Kiitos Tänname teid 谢谢
Thank You Tak
感謝您 Obrigado Teşekkür Ederiz
Σας Ευχαριστούμ 감사합니다
ඔබටතෑක
Bedankt Děkujeme vám
ありがとうございます
Tack