Курс:

ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Тема 4:

ОБЗОР ЗАДАЧ И МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

1. Постановка общей задачи оптимизации.

Многообразие ЗО обусловлено различными прикладными интерпретациями, общая постановка ЗО содержит два основных компонента.

1. Целевая функция (критерий оптимизации)

$F(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n), F(x): R^n \to R.$ (2)

2. Множество оптимизации *D* (область допустимых значений), не только определяется по функции $F(x)$, но и ограничениями в виде неравенств, которые имеют прикладную интерпретацию:

$g_{j(x)} \geq 0$ (3)

Условия могут задаваться равенствами:

$h_k(x) = 0$ (4)

Необходимо найти $X^{opt} = Arg \min_{x \in D} F(x); X^{opt} \in D \subset R^n$ и значение экстремума $\mathrm{F}(X^{opt})$ при соблюдении ограничений I рода $h_{k(x)} = 0; k = \overline{1, K}$, и ограничений II рода $g_{j(x)} \geq 0; j = \overline{1, J}$.

Число *n* , являющееся размерностью пространства, называется ***размерностью ЗО***.

Таким образом, в ЗО три основных компонента:

1. Целевая функция (критерий) оптимизации.

2. Область определения аргументов целевой функции – множество оптимизации.

3. Ограничения, налагаемые на аргументы целевой функции.

Все ЗО можно классифицировать по виду этих компонент и по условиям, налагаемым на них.

Далее рассмотрены основные классы ЗО с указаниями методов решения.

2. Локальная и глобальная оптимизация.

Поиск локально-оптимальных решений.

В локальной задаче необходимо найти какой-либо аргумент во множестве оптимизации, составляющий минимум целевой функции. То есть X_{lopt} – точка локального минимума, если существует такая окрестность этой точки, полностью лежащая во множестве оптимизации, что значение функции в любой точке из этой окрестности меньше, чем в точке локального минимума. Более строго: точка $\hat{y} \in Q$ называется точкой локального минимума функции $f(y)$ на множестве Q, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всех $y \in Q$ таких, что $|y - \hat{y}| < \varepsilon$ выполняется $f(\hat{y}) \leq f(y)$.

Как правило, тогда, когда точность приближенной оценки y^0 глобально-оптимального решения неудовлетворительна, ставится задача уточнения этого значения локальными методами. В этом случае точка y^0 — это начальное приближение для метода локального поиска. Пусть $F(x) \to \min\limits_{x \in X}$

где функция цели $F(\mathrm{x})$ – многоэкстремальная, невыпуклая и не принадлежит определенному классу гладкости на всем допустимом множестве $X \subset R_k$.

Рассмотрим множество локально-оптимальных решений:

$$X^{opt} = \{x \in X | \forall x' \in B_{\varepsilon(x)} \cap X \exists \varepsilon > 0: F(x) < F(x')\} \qquad (5)$$

Задача глобальной оптимизации состоит в определении точки $x_{opt} \in X^{opt}$, такой, что $F(x_{opt}) < F(x)$.

В общем случае, для любой многоэкстремальной функции нельзя гарантировать, что решение задачи будет получено за конечное число шагов, то есть задача глобальной оптимизации неразрешима алгоритмически. Даже некоторые из разрешимых задач могут попасть в класс неразрешимых, так как число шагов, необходимых для получения решения, может быть чрезмерно большим.

3. Условная и безусловная оптимизация.

Задача безусловной оптимизации состоит в нахождении минимума или максимума функции в отсутствие каких-либо ограничений. В постановке ЗО отсутствуют условия 1-го и 2-го типов, таким образом, получается, что все множество оптимизации совпадает с областью D допустимых значений функции цели $D \in R^N$. Большинство практических ЗО содержит ограничения.

Изучение методов безусловной оптимизации важно с нескольких точек зрения. Во-первых, ограничения в виде неравенств представляют собой границы множества оптимизации, то есть, фактически, определение этого множества. Ограничения в виде равенств предполагают поиск подходящего направления и последующей минимизации вдоль этого направления. Обоснование методов безусловной оптимизации может быть естественным образом распространено на обоснование процедур решения задач с ограничениями.

К задачам условной оптимизации относится задача распределения ресурсов. Критерием здесь служит выражение, определяющее цель использования ресурсов – прибыль, безопасность, и т.д. На ресурсы накладываются естественные ограничения: например, на производстве нельзя назначить «бесконечное рабочее время».

В случае линейного критерия задача сводится в задаче ЛП, которая подробно рассмотрена во 2-й главе. Здесь же в качестве примера приведем одну из ее интерпретаций.

Пример 3. Имеется *m* предприятий, на которых нужно разместить заказ *n* видов продукции в объемах $x_j^*, j = 1, 2, \ldots, n$. Известна $C = \{c_{ij}\}_{m \times n}$ – затратная матрица, каждый элемент которой c_{ij} – общие затраты *i-го* предприятия на выполнения *j−го* вида продукции. Мощность каждого предприятия ограничена временными ресурсами T_i. Обозначим $X = \{x_{ij}\}_{m \times n}$ план заказов, здесь x_{ij} – количество времени, затраченное *i-м* предприятием на изготовление продукции. Требуется составить план размещения заказа так, чтобы заказ был выполнен с минимальными технологическими затратами при имеющихся производственных возможностях.