Курс:

ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Тема 5:

ЛИНЕЙНАЯ И НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

В зависимости от того, к какому классу принадлежит критерий $F(x)$ и ограничения $g(x)$ и $h(x), x(x_1, x_2, \dots, xn)$, различают следующие виды задач:

I. Если $F(x)$, $g_i(x)$ и $h(x)$ – линейные, т.е. $f(x_1, x_2, \dots, xn) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, то ставится задача линейной оптимизации (линейного программирования).

II. Если функция $F(x)$, или ограничения $g_{i(x)}$, и $h(x)$, либо все вместе нелинейны, то ставится задача нелинейной оптимизации. Они также классифицируются по виду нелинейного критерия.

а) Если указанные функции можно отнести к классу выпуклых (вогнутых), то ставится задача выпуклой (вогнутой) оптимизации. Более широкий класс целевых функций определяется условием Липшица.

Если для любых точек x и x', принадлежащих отрезку $[a, b]$, приращение функции удовлетворяет неравенству:

$|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|\alpha$ (6)

где $0 < \alpha \leq 1$ и M — некоторая постоянная, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α на отрезке $[a, b]$, и пишут:

$Mf(x) \in Lip\alpha, \alpha > 0$ (7)

b) Если критерий $F(x)$ имеет вид квадратичной зависимости, т.е.

$f(x_1, x_2, \dots, xn) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j$ (8)

а ограничения линейны $g_i(x_1, x_2, \dots, xn) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq bi$, то ставится задача квадратичного программирования.

с) Если критерий и ограничения относятся к классу мультипликативных (позиномных) функций, то ставится задача геометрического программирования: $f(x_1, x_2, \dots, xn) = c x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ – позином, где a и c – вещественные числа.

Непрерывная, дискретная, целочисленная оптимизация

Если в ЗО все функции $F(x), g_i(x), h_i(x)$ непрерывны на множестве допустимых значений, то можно говорить о непрерывной ЗО.

Если же какая-либо из функций не задана как непрерывная, или множество оптимизации является дискретным, то говорят о дискретной ЗО. Примером задач дискретной оптимизации являются все задачи поиска в теории конечных графов – поиск кратчайших путей, поиск циклов и контуров минимального веса, поиск потока минимальной стоимости. Естественным подмножеством задач дискретной оптимизации являются задачи целочисленной оптимизации. К этому классу принадлежат все комбинаторные оптимальные задачи, то есть оптимизационные задачи, где допустимым множеством оптимизации является множество всех возможных перестановок. Примером может служить задача о назначениях, далее приводится ее общая формулировка.

Имеется некоторое число работ и некоторое число исполнителей. Любой исполнитель может быть назначен на выполнение любой (но только одной) работы, но с неодинаковыми затратами. Нужно распределить работы между исполнителями так, чтобы выполнить работы с минимальными затратами.

Эта формулировка очень созвучна задаче из примера 3. Дело в том, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, которая, в свою очередь, есть частный случай задачи нахождения потока минимальной стоимости.

Пусть X — некоторое конечное или счетное множество с численными координатами $X - x_{i,j} = 1, r$. Тогда получаем целочисленную ЗО. Можно задать множество X как совокупность всех целочисленных решений некоторой системы линейных (нелинейных) неравенств. В этом случае получаем целочисленную ЗО с линейными (нелинейными) ограничениями.

Теперь рассмотрим множество X, состоящее из точек $(x, y) = (x_1, x_2, \dots xr, y_1, y_2, \dots, ys)$, где x_j принимает только целочисленные значения $j = (1, r)$, а y_j изменяется в интервале $a_j \leq yj \leq bj, aj < bj, j = (1, r)$.

Тогда получаем смешанную целочисленную ЗО. В ней присутствуют как целочисленные переменные x_j, так и непрерывные переменные y_j. Аналогично характер ограничений, которым удовлетворяют точки (x, y), определяет смешанную целочисленную ЗО с линейными (нелинейными) ограничениями.