

Курс:

# ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Тема 7:

## КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

В ходе решения 3О отсутствуют единые рекомендации по выбору метода.

При разработке алгоритмов решения задачи, естественно учитывать особенности этой задачи. Однако все алгоритмы разработаны в рамках определенных методологических подходов, основные из которых обсуждаются ниже. Необходимо сказать, что наиболее общие методы, например метод множителей Лагранжа, применяются в композиции с другими, например динамическим программированием. Также методы локальной оптимизации часто используются для уточнения глобального оптимума.

В основном методологические подходы к решению 3О можно разделить на две большие группы: ***детерминированные и эвристические методы***.

***Детерминированные методы*** основаны на известных математических свойствах целевой функции – непрерывности, дифференцируемости, монотонности, выполнении условия Липшица. Если в задаче априори имеется информация о таких свойствах целевой функции и доказательство этого факта не представляет труда, то возможно использование методов классического математического анализа, например, метода множителей Лагранжа, градиентных методов поиска, требующих вычисления производных.

К этому классу относятся **методы вариационного исчисления**, которые обычно используют для решения задач, где критерии оптимальности представляются в виде функционалов и решениями которых являются функции. Такие задачи возникают обычно при статической оптимизации процессов с распределенными параметрами или в задачах динамической оптимизации. Эти задачи объединены термином «задачи оптимального управления» Использование вариационных методов здесь приводит решение оптимальной задачи к интегрированию системы дифференциальных уравнений Эйлера.

Здесь же надо упомянуть **принцип максимума**, который также применяют в теории управления для решения ЗО процессов, описываемых динамическими системами. Достоинством математического аппарата принципа максимума является то, что решение может определяться в виде разрывных функций. Принцип максимума для динамических систем при некоторых предположениях является достаточным условием оптимальности. Это и есть главное достоинство применения детерминированных методов в теории и практике оптимизации.

В настоящем пособии данные методы не рассматриваются. Заметим также, что рассмотренный подробно далее симплекс-метод для задачи линейного программирования также можно отнести к этой группе, так как для его применения надо быть уверенным, что функция цели линейна и непрерывна на заданном многограннике. То же самое можно сказать о методе геометрического программирования решения одного специального класса задач, в которых критерий оптимальности и ограничения задаются в виде мультипликативных степенных функций нескольких переменных (позиномов), т.е. выражений, представляющих собой сумму произведений степенных функций от независимых переменных.

В основе **эвристических методов** лежит итерационная процедура приближения к точке предполагаемого оптимума. В рамках такой процедуры формулируется решающее правило выбора следующего приближения, которое учитывает только информацию о значениях критерия и выполнении ограничений. Для методов, разработанных в рамках эвристического подхода, необходимо доказательство сходимости последовательности приближений к экстремальному значению критерия.

Эвристический подход в конструировании оптимальных алгоритмов получил большое распространение в теории глобальной оптимизации. В рамках этой концепции строятся методы, моделирующие физические, биологические процессы. К ним относятся метод моделирования отжига, генетические алгоритмы, метод роя частиц.

Широкое распространение получил **метод динамического программирования**, разработанный для решения 3D многостадийных процессов, особенно тех, в которых состояние каждой стадии характеризуется относительно небольшим числом переменных состояния. Очень часто под динамическим программированием понимается именно разделение процесса на этапы, каждый из которых представляет собой отдельную оптимизационную задачу, т.е. метод декомпозиции задачи по времени. Эта декомпозиция зависит от условий протекания процесса и всегда выполняется эвристически. Но оптимизация каждой стадии может выполняться, в том числе, и рациональными методами, например, используя принцип максимума. Критерий оптимальности задается как аддитивная функция критериев оптимальности отдельных стадий. По существу, метод динамического программирования представляет собой алгоритм определения оптимальной стратегии управления на всех стадиях процесса. Результаты решения обычно представлены в виде таблиц.

Еще одна идея построения эвристических методов состоит в ограничении полного перебора для решения задач дискретной и комбинаторной оптимизации. Наиболее общая реализация этой идеи носит название **метода ветвей и границ**.

Применение метода ветвей и границ включает две процедуры: ветвление и нахождение оценок (границ).

Процедура ветвления состоит в разбиении множества оптимизации на подмножества. На границах полученных подмножеств строятся оценки критерия оптимизации. Если нижняя граница значений критерия на подмножестве больше, чем верхняя граница на каком-либо ранее просмотренном подмножестве, то критерий можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Минимальную из полученных верхних оценок считают очередным приближением к глобальному минимуму. Далее эта процедура рекурсивно применяется к полученным подмножествам. Построенные таким образом подмножества являются узлами **дерева поиска** или **дерева ветвей и границ**. Если нижняя граница для узла дерева совпадает с верхней границей, то это значение является минимумом функции и достигается на соответствующей подобласти.

Заметим, что тернарный поиск на множестве – это частый случай метода ветвей и границ.

Наконец рассмотрим еще один подход к построению эвристических итерационных правил – **стратегии случайного поиска**. В [32] приводится теорема о сходимости процесса случайного поиска к глобальному экстремуму. Она является теоретическим основанием применения алгоритмов этого класса. Далее приводим обзорные сведения о наиболее современных методах этого класса.

**Генетические алгоритмы (ГА)** — это алгоритмы поиска, основанные на моделировании процесса естественного отбора. Они были разработаны Джоном Холландом и Дэвидом Эдвардом Голдбергом в 70-х годах XX столетия и с тех пор достаточно успешно применяются в практике глобальной оптимизации.

В основе ГА лежит процедура скрещивания кодированных элементов множества оптимизации. Таким образом, получается следующее поколение (потомки) элементов. На поколении действует отбор, в роли решающего признака выступает значение критерия ЗО. На следующей итерации скрещиванию подвергаются только элементы с наилучшими значениями признака. На поколении также определена процедура мутации, состоящая в случайном изменении кода случайно выбранных элементов. Заметим, что успех применения ГА, также как успех всех эвристических методов, зависит от удачного выбора параметров поиска и конструкции процедур кодирования и скрещивания.



**Метод роя частиц** глобальной оптимизации основан на идее коллективного интеллекта: индивидуумы объединяются в колонии для улучшения условий существования, каждый индивидуум в колонии в среднем имеет больше шансов на выживание, колония может более эффективно производить поиск, обработку и хранение пищи по сравнению с отдельными особями и т.д. Таким образом, любая колония в течение всего времени своего существования решает различные, часто многокритериальные ЗО.

В данной модели индивидуумы (частицы) – это элементы множества оптимизации. Пусть число таких элементов –  $m$ . Каждая частица занимается поиском наилучшего значения критерия (функции цели или качества), перемещаясь по пространству решений  $R_n$ . Траектория поиска каждой частицы – это последовательность приближений к экстремуму из начального приближения. Частицы движутся с различной скоростью  $v_i \in R_n$ , которая определяет, как изменяются координаты частицы со временем:  $x_{i+1} = x_i + \tau v_i$ , где  $\tau$  – некоторая единица измерения скорости, например, продолжительность шага алгоритма. Ключевая особенность метода роя частиц – это пересчет скорости отдельных частиц:

$$v_{i+1} = v_i + \alpha(p_i - x_i) + \beta(g - x_i) \quad (9)$$



Здесь первое слагаемое представляет собой инерцию частицы,  $p_i$  во втором слагаемом, модель индивидуальной памяти – он равен лучшей точке траектории  $i$ -ой частицы за все время ее существования. Говорят, что второе слагаемое реализует принцип простой ностальгии – каждая частица «хочет» вернуться в ту точку, где ею было достигнуто лучшее значение критерия. Заметим, что роевой интеллект основан на обмене информацией между частицами, поэтому в формуле присутствует третье слагаемое, где коэффициенты  $g$  и  $\beta$  определяют влияние траекторий других частиц на положение текущей частицы.

Метод роя частиц в основе своей реализует широко известный в теории и практике глобальной оптимизации подход мультистарта. В рамках этого подхода выбирается некоторое количество начальных приближений, и процесс поиска запускается из каждого приближения. «Обмен информацией с другими частицами» реализуется процедурой сравнения текущих приближений на каждом шаге.

Таким образом, ЗО, понимаемые как задачи поиска наилучшего значения возникли в ходе развития приложений науки. Они являются частью методологии системного анализа объектов, процессов систем. Это подтверждают публикации, предметы исследования в которых принадлежат различным прикладным областям науки и техники. Описание методов их решения, математические обоснования этих методов составляют существо теории оптимизации. Развитие алгоритмов и МО стало возможным при использовании вычислительной техники.