Курс:

ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Тема 8:

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ПРЯМАЯ И ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Задача линейного программирования.

Линейное программирование (ЛП) – глубоко проработанная область исследования операций. Как уже говорилось выше, термин «программирование» здесь употребляется в значении «планирование» или «проектирование». Более современное название раздела «математическое программирование» представляется как «теория принятия оптимальных решений». В целом же речь идет о математической модели, представленной задачей оптимизации, в которой целевая функция, представляющая критерий оптимизации, и функции, представляющие ограничения, являются линейными, т.е. входные переменные математической модели входят в функциональные выражения в степени не выше первой.

Любую задачу ЛП с заданной точностью позволяют решить современные системы компьютерной математики, электронные таблицы (MS Excel, Calc и пр.), также решение возможно в специализированных системах автоматизированного проектирования.

В 1939 году была опубликована работа "Математические методы организации и планирования производства" автора Леонида Витальевича Канторовича, профессора математико-механического факультета Ленинградского государственного университета.

Но его идеи и методы не были восприняты советскими руководителями производств, и работы по его внедрению были отложены на неопределенное время. ЛП возродилось в начале 1950-х годов с появлением электронно-вычислительных машин, тогда возродился исследовательский энтузиазм по отношению к оптимизации производства, в том числе, линейному программированию. Было опубликовано большое количество научных работ, например, в 1947 г. А.Данциг разработал алгоритм численного решения задач ЛП, который назвали симплексным методом. Название отражает суть алгоритма – необходимо перебрать все вершины выпуклого многогранника, который и является допустимым множеством. В течение нескольких последующих лет идеи ЛП получили широкое распространение во всем мире, а имена создателей стали широко известными. В 1975 году Л.В.Канторович и Т.Купманс были награждены Нобелевской премией по экономике «за применение теории математического программирования в экономике».

Прямая и двойственная задачи линейного программирования.

Задача определения максимума линейной формы:

$F(\mathrm{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$, (2.1)

на подмножестве *D* линейного пространства *L*, где *D* задается ограничениями:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_1 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k; \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}; \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}, \qquad (2.2)$$

где $x_j \ge 0, j = 1, 2, \ldots, I; I \le n$, называется задачей линейного программирования.

Функция $F(X)$ называется ***целевой функцией***. Она является критерием задачи оптимизации. Множество *D* является множеством оптимизации и называется ***множеством допустимых планов***.

Оптимальный план – это решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы ограничений (2.2), при котором целевая функция принимает максимальное значение.

Допустимые планы – все остальные решения системы (2.2).

Иногда [40] задача ЛП, в которой все ограничения являются неравенствами, а переменные задачи неотрицательны, называется стандартной. Ограничения в виде равенств называются ограничениями I типа, ограничения в виде неравенств – ограничения II типа.

Канонической задачей является задача ЛП, в которой все ограничения являются равенствами и все переменные неотрицательны. Любую ЗЛП можно привести к канонической, используя элементарные преобразования. Чтобы привести ЗЛП к каноническому виду, необходимо:

1. если в прямой задаче необходимо найти максимум целевой функции, то умножить ее на –1, изменив тем самым знак;

2. Если среди ограничений-неравенств есть такие, в которых правая часть меньше 0, то также изменить их знак умножением на –1.

3. Ввести в неравенства дополнительные (фиктивные) переменные, таким образом преобразовав их к виду равенств.

4. Переменные, для которых не установлено, что они неотрицательные, должны быть представлены разностью двух неотрицательных фиктивных переменных.

Пример 2.1. Приведение ЗЛП к каноническому виду.

Исходная формулировка задачи:

Найти минимум линейной формы $L = 3x_1 + x_2 + 5x_3$;

При ограничениях:

$$3x_2 + x_3 \geq -5;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1;$$
$$x_1 + 2x_2 \leq -3;$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

В каждое неравенство-ограничение вносятся фиктивные переменные x_4, x_5, x_6, при этом учитывается знак неравенства: в третье неравенство x_6 прибавляется в левую часть, а в первом и втором неравенстве фиктивные переменные вычитаются:

$$3x_2 + x_3 - \mathrm{x}_4 = -5;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - \mathrm{x}_5 = 1;$$
$$x_1 + 2x_2 + \mathrm{x}_6 = -3;$$

Далее первое и 3-е уравнение умножим на –1, чтобы правые части стали положительными:

$$-3x_2 - x_3 + \mathrm{x}_4 = 5;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - \mathrm{x}_5 = 1;$$
$$-x_1 - 2x_2 - \mathrm{x}_6 = 3;$$

Двойственная задача.

Рассмотрим построение двойственной задачи ЛП на основании рассмотренной прямой задачи.

Прямая задача: Найти *max* функции $F = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1x}x_x \le b_1; \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2x}x_x \le b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mx}x_x \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Двойственная задача: Найти *min* функции $Z = b_1y_1 + \cdots + b_my_m$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2; \\ \ldots \\ a_{1m}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_x. \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Задачи ЛП являются двойственными (симметричными), если выполнены условия:

1. Коэффициенты c_j при переменных в целевой линейной форме F прямой ***задачи*** – это правые части системы ограничений ***двойственной задачи***, и наоборот.

2. В прямой задаче необходимо отыскать максимум линейной формы *F*, а в двойственной – минимум линейной формы *Z*.

3. В двойственной задаче меняется знак неравенств со знаком «≤», на «≥» и наоборот.

4. Коэффициенты при переменных в системах ограничений описываются транспонированными матрицами.

5. Количество ограничений прямой задачи совпадает с количеством переменных двойственной задачи.

6. Условия неотрицательности переменных сохраняются.

Пример 2.2 Построить двойственную задачу к модели ЛП:

$$\max Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$
$$-\mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 + 5\mathrm{x}_3 \le 12$$
$$2\mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_2 + 4\mathrm{x}_3 \le 4$$
$$3\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 \le 18$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Запишем целевую функцию для минимизации: $\min f = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3$.

Теперь запишем транспонированные ограничения, поменяв знак неравенств:

$$-y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 2;$$
$$3y_1 - y_2 + y_3 \ge 1;$$
$$-5y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3.$$

В теории двойственности формулируются следующие утверждения:

Теорема 1. Для прямой и двойственной задач выполняется ровно одно из следующих утверждений:

1. Если одна из задач имеет конечное решение, то и двойственная к ней задача также имеет конечное решение, причём оптимальные значения целевых функций в двойственных задачах равны между собой.

2. Если целевая функция одной из задач не ограничена, то ограничения двойственной задачи противоречивы.

3. Обе задачи не имеют решения одновременно.

Теорема 2. Чтобы пара векторов допустимых планов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ были оптимальными планами двойственных задач, необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) = 0\ ,\quad i = 1, 2, \dots, m\ , \qquad (2.3)$$

$$x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j - c_i\right) = 0\ ,\quad j = 1, 2, \dots, n\ . \qquad (2.4)$$