Курс:

# ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Тема 11:

## ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ.

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Геометрический (графический) метод применим только к задачам, в которых количество переменных в задаче равно 2 или 3, так как он основан на геометрическом построении ряда возможных решений в задаче ЛП.

Рассмотрим геометрический метод решения задачи ЛП на нескольких примерах.

***Пример 2.3***

Геометрический метод реализуется в два этапа:

- построение допустимого множества решений задачи ЛП;
- нахождение оптимального решения среди всех допустимых.

$$\begin{cases} \max z = \max 5x_1 + 3x_2; \\ x_1 + x_2 \le 4; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Первому ограничению задачи соответствует прямая $x_1 + x_2 = 4$, обозначенная на рисунке 2.1 значком (1). Точки пересечения прямой $x_1 + x_2 = 4$ и осей координат: $((4{,}0), (0{,}4))$. Второе ограничение – прямая $5x_1 + 2x_2 = 10$, пересекается с осями координат в точках $((2{,}0), (0{,}5))$. Необходимо принять во внимание ограничения (3) на знак переменных. Множество допустимых решений данной задачи изображено на рисунке 2.1 в виде заштрихованного четырехугольника.

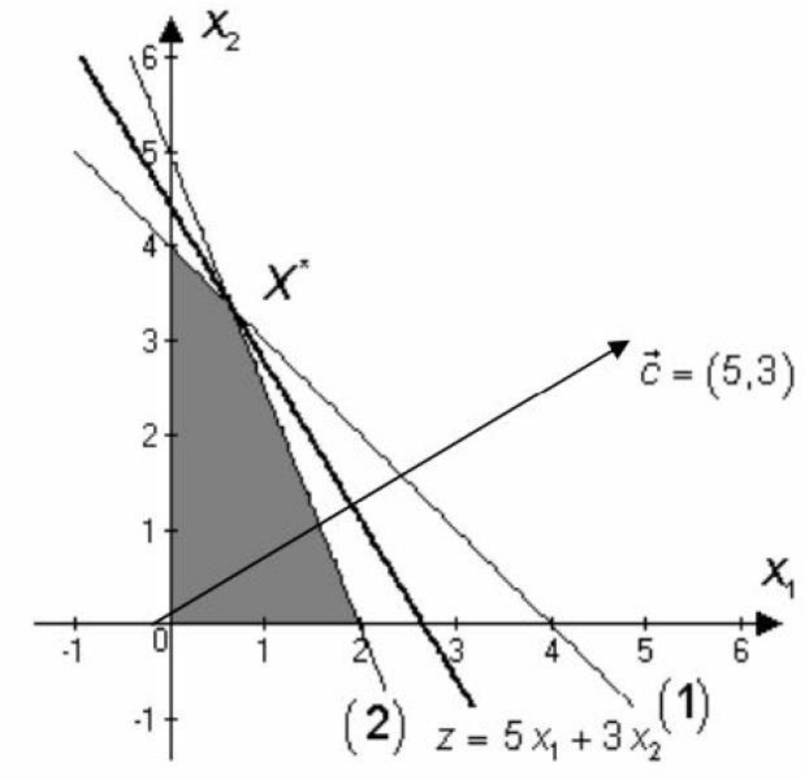


*Рисунок 2.1 – Графический метод решения*

Чтобы найти оптимальное решение, необходимо определить направление наиболее быстрого роста целевой функции Z. Это направление является результатом градиента целевой функции:

$$grad(z(x_1, x_2)) = \left( \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \right), \qquad (2.13)$$

Поскольку $z = 5x_1 + 2x_2$, то направление наискорейшего роста функции $z$ определяется вектором $\vec{c} = (5{,}3)$. Этот вектор также является вектором нормали к линии уровня целевой функции $z = 5x_1 + 2x_2 = const$.

Пересечение диапазона возможных решений и линии, соответствующей максимальному значению целевой функции, является решением задачи ЛП.

На рисунке 2.1 показано, что эта точка является пересечением прямых (1) и (2). Эти координаты можно найти как решение системы уравнений, определяющей следующие строки:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 4 \\ 5\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{2}{3} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

Следовательно,

$X^* = (\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$ – оптимальное решение;

$z(X^*) = 5 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{10}{3} = \frac{40}{3}$ – максимальное значение целевой функции.