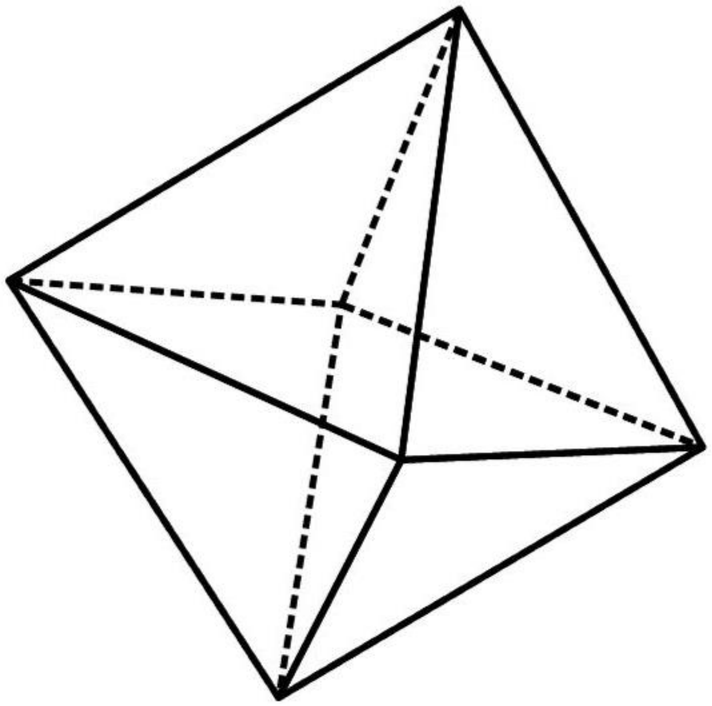
Курс:

ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ



Тема 13:

НЕКОРРЕКТНЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Не всегда симплекс-метод решения ЗЛП дает удовлетворительные результаты.

Если условия задачи поставлены некорректно, возникают следующие особые случаи:

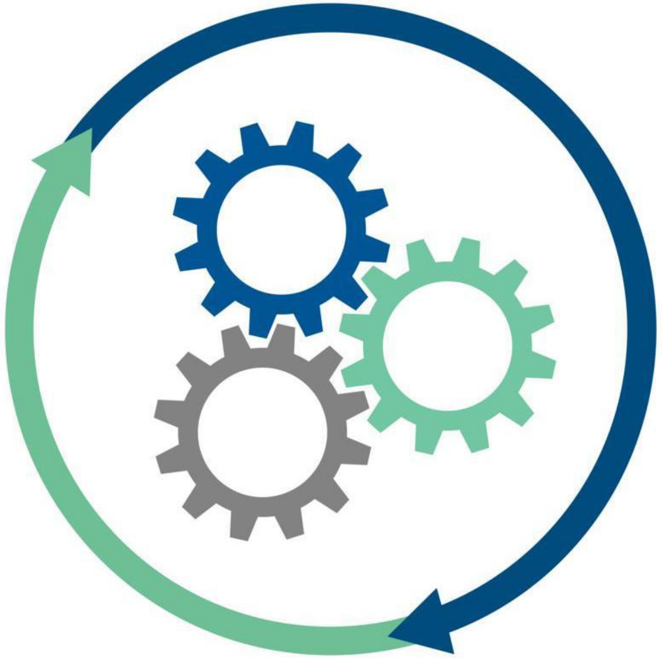
1) вырожденное решение;

2) альтернативные оптимальные решения;

3) неограниченные решения;

4) отсутствие допустимых решений.

Вырожденность



В ходе выполнения симплекс-метода проверка условия допустимости может привести к неоднозначному выбору исключаемой переменной. В этом случае на следующей итерации одна или более *базисных* переменных примут нулевое значение. Тогда новое решение будет **вырожденным.**

В вырожденном решении нет никакой опасности, за исключением небольших теоретических неудобств, которые мы далее кратко обсудим. С практической точки зрения вырожденность объясняется тем, что в исходной задаче присутствует, по крайней мере, одно *избыточное* ограничение.

Пример (Вырожденное оптимальное решение)

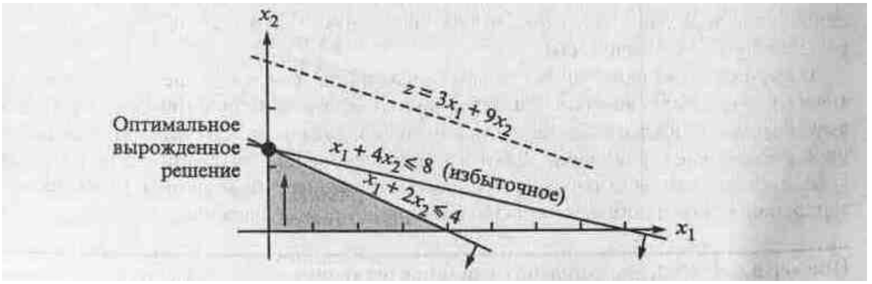
Рассмотрим следующую задачу ЛП:
Максимизировать $W(\varphi) = 3\varphi_1 + 9\varphi_2$

при выполнении условий

$\varphi_1 + 4\varphi_2 \leq 8$, $\varphi_1 + 2\varphi_2 \leq 4$, φ_1, $\varphi_2 \geq 0$.

Обозначим через φ_3 и φ_4 дополнительные переменные. Результаты применения симплекс-метода представлены в следующей таблице.

Итерация	Базис	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	Решение
Начальная	$W(\varphi)$	-3	-9	0	0	0
Вводится φ_2	φ_3	1	4	1	0	8
Исключается φ_3	φ_4	1	2	0	1	4
Итерация	Базис	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	Решение
Первая	$W(\varphi)$	-3/4	0	9/4	0	18
Вводится φ_1	φ_2	1/4	1	1/4	0	2
Исключается φ_4	φ_4	1/2	0	-1/2	1	0
Вторая	$W(\varphi)$	0	0	3/2	3/2	18
Оптимум	φ_2	0	1	1/2	-1/2	2
	φ_1	1	0	-1	2	0



На начальной итерации в качестве исключаемой можно выбрать как переменную φ_3 так и φ_4.
Если оставить в базисе переменную φ_4, на следующей итерации она примет значение 0 (как показано в таблице), т.е. получим вырожденное базисное решение. Оптимальное решение получается на следующей итерации.

Что же практически приводит к вырожденности решения?

Рассмотрим рис. 4.2.2, графически представляющий решение этой задачи.

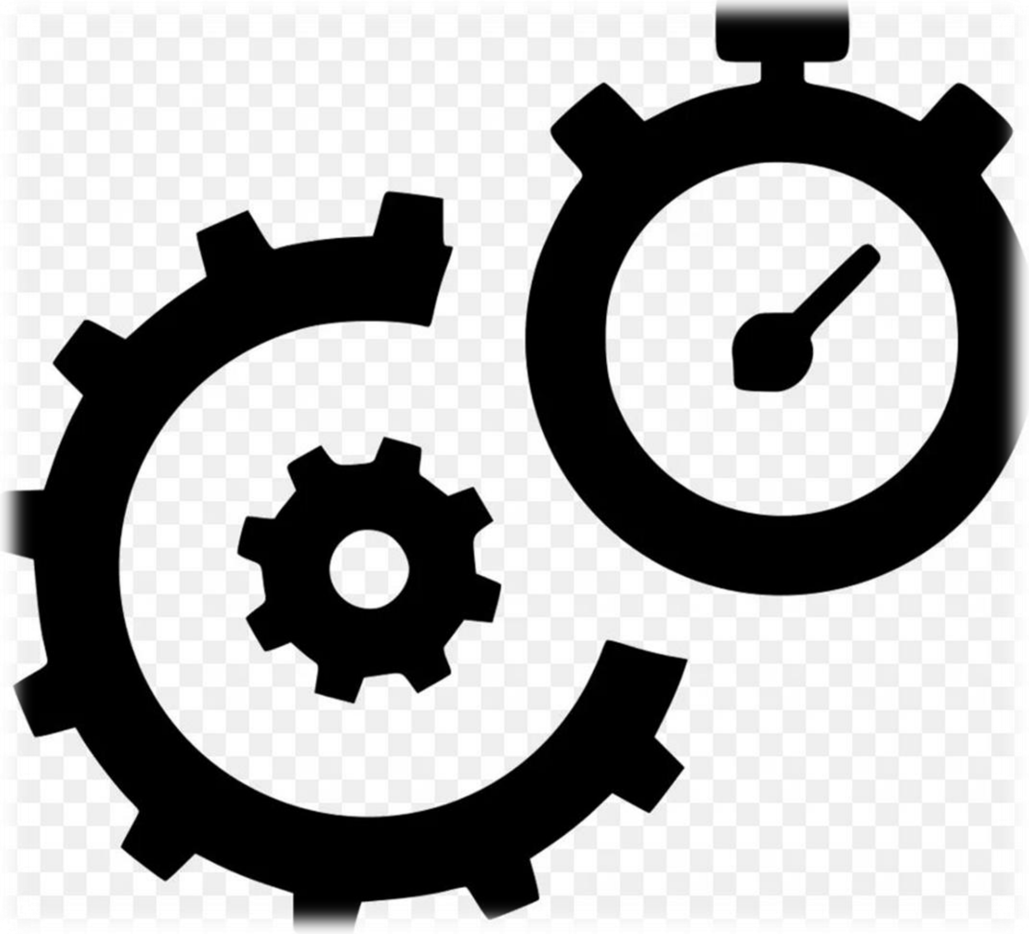
Точка оптимума $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2$ является пересечением трех прямых. Поскольку данная задача двухмерна, эта точка переопределена (на плоскости для определения точки достаточно двух прямых), и, следовательно, одно из ограничений избыточно. На практике информация о том, что некоторые ресурсы недефицитны, может быть полезной при интерпретации результатов решения задачи. Эти сведения также могут помочь выявить неточности и ошибки в постановке исходной задачи.

К сожалению, не существует способов определить избыточное ограничение непосредственно из данных симплекс-таблиц.

Альтернативные оптимальные решения

Когда прямая (если рассматривается двухмерная задача ЛП, а в общем случае – гиперплоскость), представляющая целевую функцию, параллельна прямой (гиперплоскости), соответствующей *связывающему* неравенству (которое в точке оптимума выполняется как точное равенство), целевая функция принимает *одно и то же оптимальное значение* на некотором множестве точек границы области допустимых решений.

Эти решения называются **альтернативными оптимальными решениями.**



Пример

Рассмотрим следующую задачу ЛП:

Максимизировать $W(\varphi) = 2\varphi_1 + 4\varphi_2$

при ограничениях

$\varphi_1 + 2\varphi_2 \le 5,$

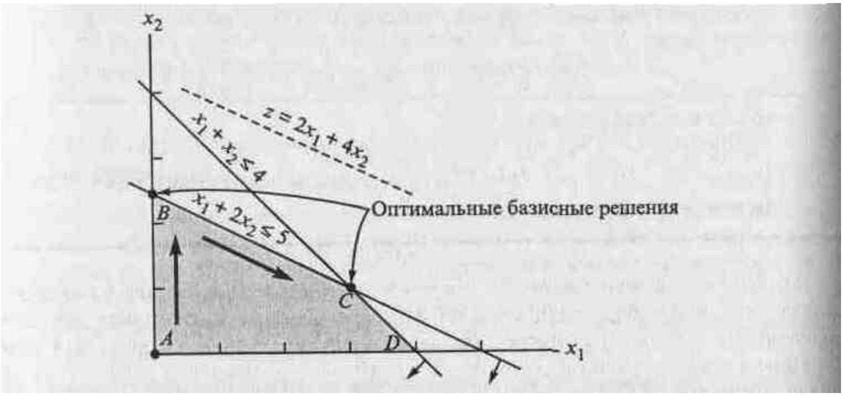
$\varphi_1 + \varphi_2 \le 4,$

$\varphi_1,\ \varphi_2 \ge 0.$

На рис. 4.2.3 показано множество альтернативных оптимальных решений, которые являются следствием того, что прямая, представляющая целевую функцию, параллельна прямой, соответствующей связывающему ограничению. Каждая точка *отрезка BC* соответствует оптимальному решению со значением целевой функции $W(\varphi) = 10$.

Последовательные итерации выполнения симплекс-метода представлены в следующей таблице.

Итерация	Базис	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	Решение
Начальная	W(φ)	-2	-4	0	0	0
Вводится φ_2	φ_3	1	2	1	0	5
Исключается φ_3	φ_4	1	1	0	1	4
Первая	W(φ)	0	0	2	0	10
Вводится φ_1	φ_2	1/2	1	1/2	0	5/2
Исключается φ_4	φ_4	1/2	0	-1/2	1	3/2
Вторая (альтернативный оптимум)	W(φ)	0	0	2	0	10
	φ_2	0	1	1	-1	1
	φ_1	1	0	-1	2	3



На первой итерации получаем оптимальное решение $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 5/2$ *и* $W(\varphi) = 10$, *которое соответствует точке B* на рис. 4.2.3. Как узнать из симплекс-таблицы, что существует альтернативное оптимальное решение? Посмотрите на коэффициенты *небазисных* переменных в $W(\varphi)$-строке первой итерации. Коэффициент небазисной переменной φ_1 равен нулю, это означает, что данную переменную можно ввести в базис без изменения значения целевой функции, но значение самой переменной φ_1 *изменится. Введение переменной* φ_1 *в базисное решение выполнено на второй итерации, при этом из базиса исключена переменная* φ_4. *Получено новое решение* $\varphi_1=3$, $\varphi_2=1$ и $W(\varphi)=10$, которое соответствует точке *C* на рис. 4.2.3.
Симплекс-метод может определить только две угловые точки B и С. Математически мы можем найти все точки (φ_1', φ_2') отрезка *BC* как взвешенное среднее точек *B* и *C*.

Полагая $0 \le \alpha \le 1$ *и зная координаты точек B* и *C*:
B: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 5/2$,
C: $\varphi_1 = 3$, $\varphi_2 = 1$,
координаты любой точки отрезка BC можно записать следующим образом:

$$\varphi_1' = \alpha \times 0 + (1-\alpha) \times 3 = 3 - 3\alpha,$$

$$\varphi_2' = \alpha \times \frac{5}{2} + (1-\alpha) \times 1 = 1 + \frac{3}{2}\alpha.$$

При $\alpha = 0$ (φ_1', φ_2') =(3, 1), что соответствует точке *C*. При $\alpha = 1$ получаем (φ_1', φ_2') = (0, 5/2) – это точка *B*. Если значение α лежит строго между 0 и 1, получаем внутренние точки отрезка *BC*.

Неограниченное возрастание переменных

В некоторых задачах ЛП значения переменных могут неограниченно возрастать без нарушения ограничений.

Это говорит о том, что пространство допустимых решений **не ограничено**, по крайней мере, по одному направлению.

В результате этого целевая функция может возрастать (задача максимизации) или убывать (задача минимизации) неограниченно.

Неограниченность решения задачи свидетельствует только об одном: модель разработана не достаточно корректно.

Типичные ошибки, приводящие к построению таких моделей, заключаются в том, что не учитываются ограничения, не являющиеся избыточными, и не точно оцениваются параметры (коэффициенты) ограничений

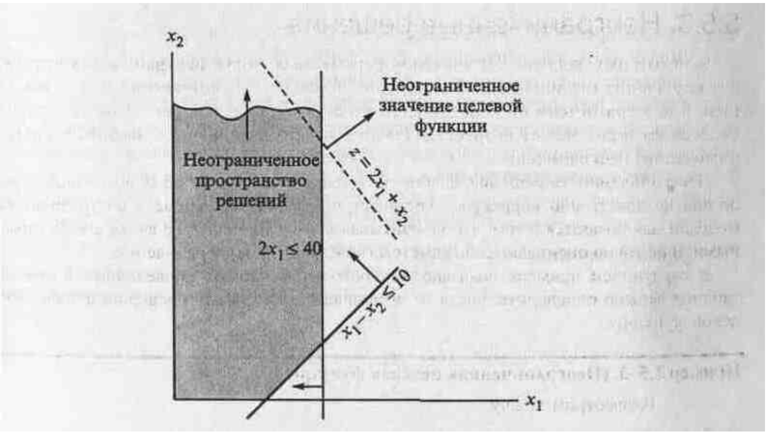
Пример (Неограниченная целевая функция)

Рассмотрим следующую задачу ЛП:
Максимизировать $W(\varphi) = 2\varphi_1 + \varphi_2$

при ограничениях
$\varphi_1 - \varphi_2 \leq 10,$
$2\varphi_1 \leq 40,$
$\varphi_1,\ \varphi_2 \geq 0.$
Симплекс-таблица начальной итерации этой задачи имеет следующий вид.

Базис	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	Решение
$W(\varphi)$	-2	-1	0	0	0
φ_3	1	-1	1	0	10
φ_4	2	0	0	1	40

Из этой таблицы видно, что в качестве вводимой переменной можно взять как φ_1, *так и* φ_2. *Поскольку переменная* φ_1 *имеет максимальный (по абсолютной величине) отрицательный коэффициент в* $W(\varphi)$-строке, именно ее следует ввести в базисное решение. Однако заметим, что *во всех ограничениях <u>коэффициенты, стоящие перед переменной</u>* φ_2 *отрицательны* или *равны нулю*. Это означает, что значение переменной φ_2 *может возрастать до бесконечности, и при этом не нарушается ни одно ограничение. Поскольку увеличение на 1 значения переменной* φ_2 *приводит к увеличению на 1 значения целевой функции, значит, неограниченное увеличение значения переменной* φ_2 *ведет к неограниченному увеличению значения целевой функции. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 4.2.4. На этом рисунке видно, что пространство допустимых решений не ограничено в направлении оси* φ_2 *и значение целевой функции может быть каким угодно большим.*



Отсутствие допустимых решений

Если ограничения задачи ЛП несовместны (т.е. они не могут выполняться одновременно), то задача не имеет допустимых решений.
Такая ситуация не может возникнуть, если *все* неравенства, составляющие систему ограничений, имеют тип «≥» с неотрицательными правыми частями, так как в этом случае дополнительные переменные могут составить допустимое решение.
Для других типов ограничений мы используем искусственные переменные.
И хотя в оптимальном решении все искусственные переменные в силу штрафов равны нулю, такой исход возможен только тогда, когда задача имеет непустое пространство допустимых решений.
В противном случае в оптимальном решении будет присутствовать хотя бы одна *положительная* искусственная переменная.

С практической точки зрения отсутствие допустимых решений свидетельствует о том, что задача плохо сформулирована.

Пример (Отсутствие допустимых решений)

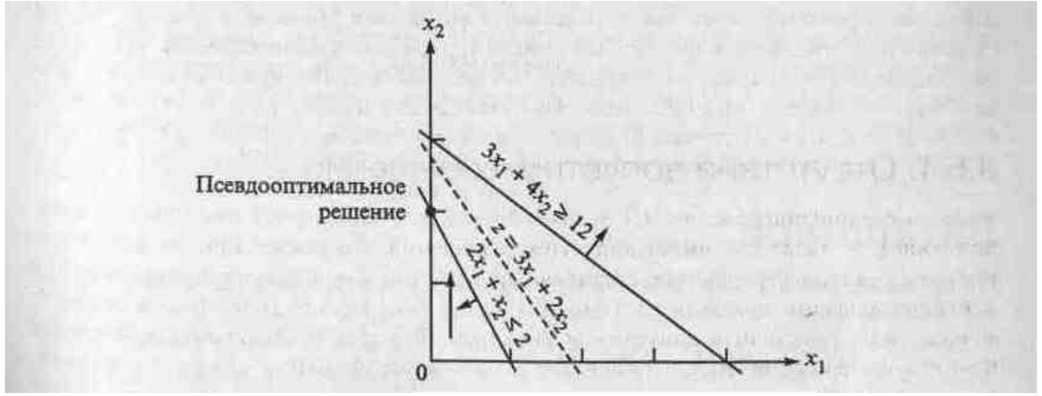
Рассмотрим следующую задачу ЛП:
Максимизировать $W(\varphi) = 3\varphi_1 + 2\varphi_2$

при ограничениях
$2\varphi_1 + \varphi_2 \le 2$,
$3\varphi_1 + 4\varphi_3 \ge 12$,
$\varphi_1, \ \varphi_2 \ge 0$.
Результат применения симплекс-метода представлен в следующей таблице.

Итерация	Базис	φ_1	φ_2	φ_4	φ_3	R	Решение
Начальная	W(φ)	-3-3M	-2-4 M	M	0	0	-12 M
Вводится φ_2	φ_3	2	1	0	1	0	2
Исключается φ_3	R	3	4	-1	0	1	12
Первая (псевдо оптимум)	W(φ)	1+5 M	0	M	2+4 M	0	4-4 M
	φ_2	2	1	0	1	0	2
	R	-5	0	-1	-4	1	4

Данные из этой таблицы показывают, что в точке оптимума искусственная переменная *R* имеет положительное значение (= 4), что свидетельствует об отсутствии допустимого решения.

На рис. 4.2.5 графически представлена ситуация данной задачи.



Алгоритм симплекс-метода, допуская положительные значения искусственной переменной, по существу, превращает неравенство $3\varphi_1 + 4\varphi_3 \ge 12$ в $3\varphi_1 + 4\varphi_3 \le 12$.

В результате получаем то, что можно назвать **псевдо оптимальным решением.**