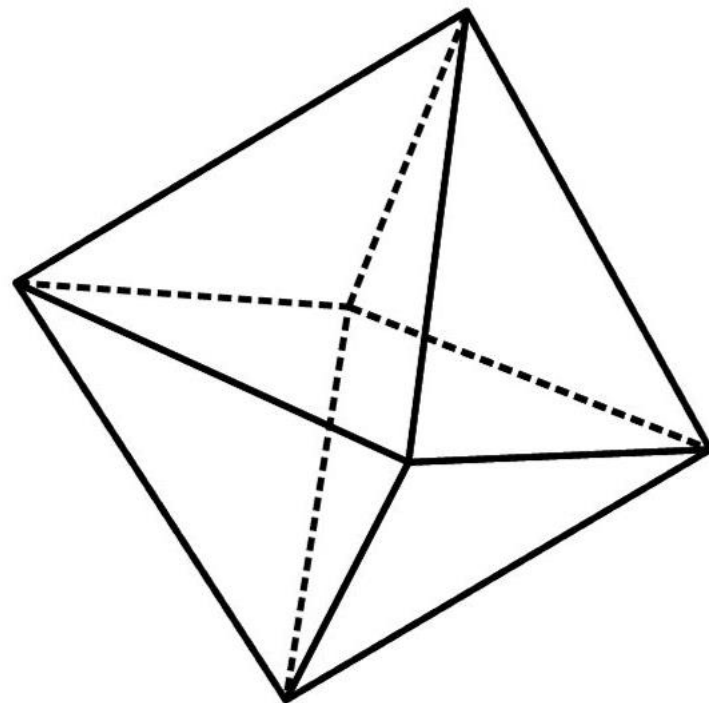


Курс:

ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ



Тема 14:

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Теорема 1. В оптимальном решении двойственной задачи значения переменных y_i^* (оценок) численно равны частным производным $\partial f_{\max} / \partial b_i$ для исходной задачи.

Отсюда при малых изменениях Δb_i свободных членов b_i следует приближенное равенство

$$\Delta f_{\max} \approx \bar{y}^* \Delta \bar{b} = \sum_i y_i^* \Delta b_i.$$

Некоторые аспекты применения двойственных оценок оптимального плана для его экономико-математического анализа рассмотрим на примере задачи рационального использования ресурсов по критерию максимума прибыли.

В матрично-векторной форме задача записывается следующим образом:

исходная задача

$$\bar{p}\bar{x}(\max);$$

$$A\bar{x} \leq \bar{b};$$

$$\bar{x} \geq 0;$$

двойственная задача

$$\bar{b}\bar{y}(\min);$$

$$A^T \bar{y} \geq \bar{p};$$

$$\bar{y} \geq 0,$$

где

\bar{p} - вектор прибыли продукции;

\bar{x} - искомый вектор – план производства продукции;

A - матрица коэффициентов при неизвестных – нормы потребления ресурсов;

\bar{y} - вектор ограничений по ресурсам;

\bar{b} - вектор оценок ресурсов.

Анализ задач линейного программирования может проводиться путем сопоставления различных вариантов решений; с помощью анализа внутренней структуры каждого из полученных решений, базирующегося на свойствах двойственных оценок, приведенных ниже.

Двойственные оценки являются:

- *показателем дефицитности ресурсов и продукции.* Это их свойство следует из теоремы. Величина y_i^* является оценкой i -го ресурса. Чем больше значение оценки y_i^* , тем выше дефицитность ресурса. Для недефицитного ресурса $y_i^* = 0$;
- *показателем влияния ограничений на значение целевой функции.* Ранее было отмечено, что $y_i^* = \partial f_{\max} / \partial b_i$. При *незначительном приращении* Δb_i является точной мерой влияния ограничений на целевую функцию. Поэтому представляет интерес определение предельных значений ограничений (нижней и верхней границ), в которых величины оценок остаются неизменными;
- *показателем эффективности производства отдельных видов продукции с позиции критерия оптимальности.* Это свойство следует из теоремы. Его суть заключается в том, что в оптимальный план может быть включена лишь та продукция j -го вида, для которой выполняется условие

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* < p_j;$$

- *инструментом сопоставления суммарных условных затрат и результатов.* Это свойство следует из принципа двойственности, в котором устанавливается связь между значениями функций прямой и двойственной задач.

Из ранее данной экономической интерпретации двойственных задач следует, что равенство значений целевых функций при оптимальных планах означает, что оценка всех затрат производства должна равняться оценке производственного продукта.

Для целей анализа большое значение имеет матрица $A^{-1} = [d_{ij}]$, обратная матрице базиса оптимального плана $A = [a_{ij}]$.

Двойственные оценки можно использовать для экономического анализа решения при условии, что ограничения на ресурсы изменяются лишь в определенных пределах. В этой связи говорят о *допустимом интервале устойчивости оценок*. Интервал устойчивости оценок по отношению к i -му ограничению имеет вид

$$\left[b_i - \Delta b_i^H; b_i + \Delta b_i^B \right] \quad (i = \overline{1, m}),$$

где Δb_i^H называют *нижним пределом уменьшения*, а Δb_i^B - *верхним пределом увеличения* и вычисляют по формулам:

$$\Delta b_i^H = \min_j \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\}; \quad \Delta b_i^B = \max_j \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\}.$$

Целесообразность включения в план новых видов продукции оценивается характеристикой $\Delta_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} - p_j$.

Если $\Delta_j < 0$, то данный вид продукции после введения в план улучшает его. При $\Delta_j > 0$ включение продукции в план нецелесообразно.

Пусть имеется возможность приобрести дополнительно i -й ресурс в объеме Δb_i . Эта величина находится в пределах устойчивости двойственных оценок. Цена единицы ресурса равна c_i . Следовательно, приращение прибыли $\Delta f_{i \max} = \Delta b_i y_i^*$, в то время как затраты на приобретение ресурса составляют $\Delta c_i = \Delta b_i^B c_i$. Данное мероприятие будет эффективным, если обеспечит дополнительную прибыль, т. е. если $\Delta p_i > 0$, где

$$\Delta p_i = \Delta f_{i \max} - \Delta c_i.$$