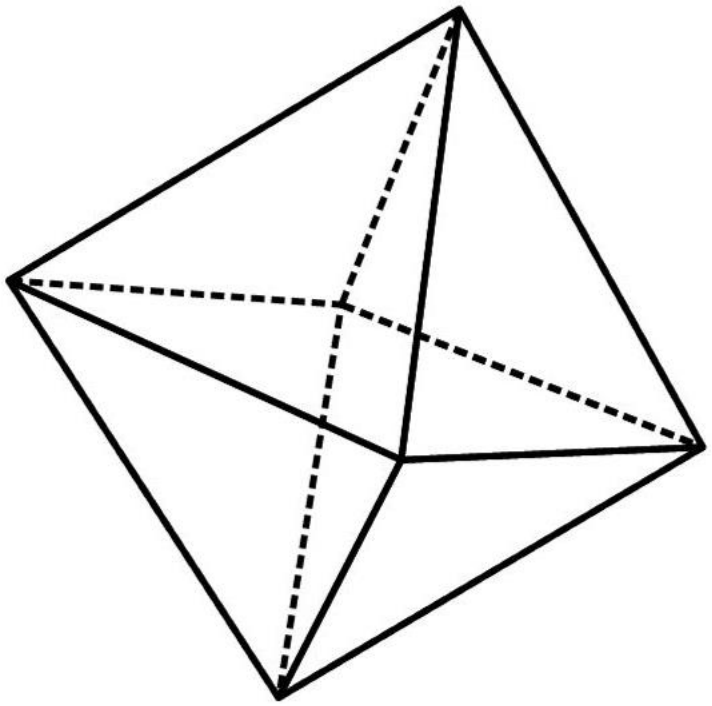
Курс:

ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ



Тема 15:

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ.

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Построение двойственной задачи и ее экономическая интерпретация

Рассмотрим задачу объемного планирования. Пусть исходная задача такова:

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (1)$$

$$D_x \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m} & (2) \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n} & (3) \end{cases}$$

Требуется определить объемы производства n видов продукции

$x_1, x_2, \ldots x_n$, обеспечивающие наибольший суммарный доход, при условии, что расход ресурсов не превосходит их запасов.

b_i, $i=\overline{1,m}$ – запасы ресурсов каждого вида

a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ – нормы расхода i-го ресурса на единицу j-ой продукции

c_j, $j=\overline{1,n}$ – доход от единицы j-ой продукции

Введем оценку полезности единицы i-го ресурса y_i

Добавим в систему одну тонну ресурса. На сколько при этом увеличится максимальный доход?

Сравним затраты ресурсов на единицу j-ой продукции с доходом, полученным от единицы j-ой продукции:

$$\begin{cases} a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \geq c_j \\ y_i \geq 0 \qquad i = \overline{1,m} \end{cases}$$

Исходя из закона сохранения материальных потоков, необходимо потребовать, чтобы суммарная оценка затрат была не меньше дохода, иначе доход буден получен из ничего. Будем искать такое решение, при котором суммарная оценка запасов ресурса минимальна:

$$T(\overline{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

Тогда задача (4)-(6) является *двойственной* к исходной задаче.

$$T(\overline{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,n} & (5) \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m} & (6) \end{cases}$$

Математическая формулировка двойственной задачи к произвольной задаче линейного программирования

Пусть исходная задача имеет вид:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, p} & (8) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{p+1, n} & (9) \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, r} & (10) \end{cases}$$

Тогда двойственной к задаче (7-10) называется задача вида:

$$T(\overline{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \qquad (11)$$

$$\begin{cases} x_i \ge 0: \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_i, \quad i = \overline{1, r} & (12) \\ x_i \forall: \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_i, \quad i = \overline{r+1, n} & (13) \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, p}, \qquad y_i \forall, \quad i = \overline{p+1, m} & (14) \end{cases}$$

Правила построения двойственной задачи

Для применения правил, необходимо в задаче на максимум записать все ограничения – неравенства со знаком $\leq$. В задаче же на минимум – со знаком $\geq$

- Количество переменных одной задачи совпадает с количеством ограничений другой задачи. Т.е. каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой. Ограничению-неравенству соответствует неотрицательная переменная, а ограничению-равенству – переменная произвольного знака.
- Правые части ограничений одной задачи являются коэффициентами критерия другой.
- Матрицы условий этих задач взаимно транспонированы, т.е. столбец матрицы условий одной задачи становится строкой другой.
- Критерий одной задачи максимизируется, а другой минимизируется. Причем в задаче на максимум все ограничения – неравенства типа $\leq$, а в задаче на минимум – типа $\geq$

Пусть исходная задача имеет вид:

$$F = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 100 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 \ge 30 \\ 1x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 40 \\ x_1, x_4 \ge 0, \quad x_2, x_3 \forall \end{cases}$$

Построить двойственную задачу.

$$F = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 100 \\ -6x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 2x_4 \le -30 \\ 1x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 40 \\ x_1, x_4 \ge 0, \quad x_2, x_3 \forall \end{cases}$$

$$T = 100y_1 - 30y_2 + 40y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 \ge 0: & 2y_1 - 6y_2 + y_3 \ge 3 \\ x_2 \forall: & y_1 - 4y_2 + y_3 = 5 \\ x_3 \forall: & 4y_1 - 8y_2 + 4y_3 = 6 \\ x_4 \ge 0: & 5y_1 - 2y_2 + 5y_3 \ge 2 \\ & y_1, y_2 \ge 0, \quad y_3 \forall \end{cases}$$

Покажем, что эти задачи взаимно двойственные. Для этого построим двойственную задачу к двойственной:

$$F = 3z_1 + 5z_2 + 6z_3 + 2z_4 \to \max$$

$$\begin{cases} y_1 \ge 0: & 2z_1 + z_2 + 4z_3 + 5z_4 \le 100 \\ y_2 \ge 0: & -6z_1 - 4z_2 - 8z_3 - 2z_4 \le -30 \\ y_3 \forall: & z_1 + z_2 + 4z_3 + 5z_4 = 40 \\ & z_1, z_4 \ge 0, \quad z_2, z_3 \forall \end{cases}$$

Действительно, полученная задача совпадает с исходной.