Курс:

ТЕОРИЯ ИГР

Тема 3:

ИГРЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Итак, игра в нормальной (или стратегической) форме — это тройка

$\{I, S = \Pi_i\{S_i\}_{i\in I}, u = (u_1, \dots, u_n)\}$,

где $I = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков,

S_i — множество стратегий (ходов), доступных игроку i = 1,. . . , n ,

$u_i : S = \Pi_{i\in I}, S_i \to R^1$ — функция выигрышей игрока *i*, ставящая в соответствие каждому набору стратегий $s = (s_1, \dots, s_n)$, называемому также ситуацией, выигрыш этого игрока.

Стандартный пример здесь — дуополия по Бертрану и по Курно, когда стратегии — это цены или объемы выпуска, соответственно, а выигрыши — это прибыль.

Важным предположением, которое играет ключевую роль в теории, состоит в предположении, что все игроки рациональны, в том смысле, что каждый игрок рассматривает имеющиеся в его распоряжении альтернативы, формирует представления относительно неизвестных параметров, имеет четко определенные предпочтения и выбирает свои действия в результате некоторого процесса оптимизации (максимизации своей целевой функции). Более того, не менее существенным является факт общеизвестности (общего знания) рациональности игроков, т.е. все игроки не только рациональны, но и знают, что другие игроки рациональны, что все игроки знают, что все игроки знают, что они рациональны и т.д.. Формальное определение общеизвестности см. Aumann (1976).

Замечание 1.2.1. В последние годы появилось значительное число работ, посвященных исследованию моделей ограниченной рациональности. Основная мотивация этих работ — неудовлетворенность теорией, оперирующей с "совершенно рациональным человеком", поскольку мы являемся свидетелями весьма частого несоответствия реального поведения людей предположению "совершенной рациональности". Идея моделирования ограниченной рациональности восходит к работам Герберта Саймона (Simon (1955, 1956), см. также Simon (1972, 1976)). Обсуждение проблем, связанных с моделированием ограниченной рациональности можно найти, например, в книге Rubinstein (1998). Различные взгляды на проблемы моделирования рациональных и ограниченных рациональных игроков изложены в работах Binmore (1987, 1988), Auman (1996).

Обратимся к тому случаю, когда $I = \{1, 2\}$ и множества стратегий каждого из двух игроков — конечны. В этом случае игру можно "изобразить" с помощью матрицы (см. рис.6), где $M = |S_1|$ — число возможных стратегий игрока 1, $K = |S_2|$ — число возможных стратегии игрока 2,

$$a_{mk} = u_1\left(s_1^{(m)}, s_2^{(k)}\right), b_{mk} = u_2\left(s_1^{(m)}, s_2^{(k)}\right), k = 1, \dots, K, m = 1, \dots, M$$

Эту же игру можно представить в виде двух матриц (поэтому такие игры называются часто биматричными), элементами которых являются элементы a_{mk} и b_{mk}, соответственно.

Для конечной антагонистической игры, т.е. игры двух лиц такой, что $u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2)$ для всех $s_i \in S_i, i = 1{,}2$, справедливо равенство $a_{mk} = -b_{mk}$, для всех m и k,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} s_2^1 & & s_2^{(k)} \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1^1 \\ \vdots \\ s_1^{(m)} \end{array} & \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & \dots & (a_{1k}, b_{1k}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & \dots & (a_{mk}, b_{mk}) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 6.

а поэтому такая игра может быть задана только одной матрицей (a_{mk}) $m = 1, \dots, M, k = 1, \dots, K$, и поэтому конечные антагонистические игры называются матричными (см. подробнее Дополнение (Раздел 1.13)).

Смешанная стратегия σ_i — это вероятностное распределение на множестве чистых стратегий S_i. (Мотивацию введения смешанных стратегий мы оставляем на будущее).

Рандомизация каждым игроком своих стратегий статистически независима от рандомизаций его оппонентов, а выигрыши, соответствующие профилю (набору) смешанных стратегий — это ожидаемое значение выигрышей соответствующих чистых стратегий (т.е. речь здесь идет об ожидаемой полезности). Одна из причин, по которой мы сосредотачиваемся на конечном случае — стремление избежать "осложнений", связанных с теорией меры.

Будем обозначать пространство смешанных стратегий *i*-ого игрока через Σ_i , а $\sigma_i(s_i)$ — вероятность того, что выбирается стратегия s_i . Пространство наборов смешанных стратегии $\Sigma = \Pi_{i \in I} \Sigma_i$, элементы которого мы будем обозначать через σ. Носитель смешанной стратегии σ_i — это множество тех чистых стратегий, которым "приписана" положительная вероятность.

Определение 1.2.1. Если S_i — конечное множество чистых стратегий игрока *i*, то смешанная стратегия $\sigma_i\colon S_i \to [0,1]$ ставит в соответствие каждой чистой стратегии $s_i \in S_i$ вероятность $\sigma_i(s_i) \geq 0$ того, что она будет играться, причем $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$.

(Обратим внимание на то, что индекс *i* означает здесь, что речь идет о стратегии игрока *i*. Поэтому, если мы будем говорить о разных стратегиях игрока *i*, то мы будем обозначать их s_i, s'_i, s''_i, ...).

Нетрудно заметить, что множество смешанных стратегий игрока *i* — это $(k_i - 1)$-мерный симплекс, где k_i — число чистых стратегий *i*-го игрока.

Выигрыш игрока *i*, соответствующий профилю (набору) стратегий σ, есть

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_i(s_i) \right) u_i(s) \qquad (2.1)$$

(поскольку на наборах чистых стратегий значения этой функции совпадают со значениями исходной функции выигрышей u_i, мы сохраняем то же обозначение).

Важно отметить, что выигрыш i-ого игрока есть линейная функция от вероятностей σ_i, а также является полиномом от профиля, а потому непрерывен. Наконец, чистые стратегии являются вырожденными смешанными стратегиями, приписывающими вероятность 1 данной чистой стратегии и вероятность 0 — остальным.

Определение 1.2.2. Смешанным расширением игры $\Gamma = \{I, S, u\}$ называется игра $\bar{\Gamma} = \{I, \Sigma, u\}$, где $\Sigma = \Pi_{i \in I} \Sigma_i$
а $u(\sigma)$, где $\sigma \in \Sigma$, определяется равенством (2.1).

Пример. Рассмотрим игру, изображенную на рис. 7.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} L & M & P \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ m \\ d \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} (4,3) & (5,1) & (6,2) \\ (2,1) & (8,4) & (3,6) \\ (3,0) & (9,6) & (2,8) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 7.

Пусть $\sigma_1 = ({}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$ – (это означает, что смешанная стратегия игрока 1 приписывает ему играть стратегии *u, m* и *d* с вероятностями *1/3*), $\sigma_2 = (0, {}^1/_2, {}^1/_2)$ – (эта смешанная стратегия игрока 2 предписывает играть стратегии *M* и *D* с равными вероятностями и не играть стратегию *L* вовсе). В данном случае мы получаем:

$u_1(\sigma) = \frac{1}{3}\left(0 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 6\right) + \frac{1}{3}\left(0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 3\right) + \frac{1}{3}\left(0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 2\right) = \frac{11}{2}$,

$u_2(\sigma) = \frac{27}{6}$.