Курс:

ТЕОРИЯ ИГР

Тема 4:

ДОМИНИРУЮЩИЕ И ДОМИНИРУЕМЫЕ СТРАТЕГИИ

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Посмотрим внимательно на приведенную выше игру (рис.7). Независимо от того, как играет игрок 1, *R* дает игроку 2 строго больший выигрыш нежели *M*. В этом смысле стратегия *M* строго доминируема, поэтому ясно, что рациональный игрок 2 не должен играть *M*. Далее, если игрок 1 знает (т.к. он сам рационален и знает, что другой рационален...), что 2 не будет играть *M*, то для него *m* будет лучше, чем *u* или *d*. Наконец, если игрок 2 знает, что игрок 1 знает, что игрок 2 не будет играть *M*, то игрок 2 знает, что 1 будет играть *m*, а тогда 2 должен играть *L*. Этот процесс — последовательное удаление строго доминируемых стратегий (мы дадим позднее строгое определение и соответствующий экономический пример).

Вопрос, естественно возникающий здесь: "А не зависит ли множество стратегий, выдерживающих такое исключение доминируемых стратегий, от порядка исключения?" К счастью, нет, и дело здесь в том, что если стратегия s_i строго хуже чем s' для всех стратегий оппонента из множества *D*, то она хуже чем s' и для любого подмножества множества *D*.

Посмотрим теперь на следующую игру (см. рис. 8)

$$\begin{array}{c} \\ u \\ M \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad L \quad & \quad R \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,0) & (-1,0) \\ (0,0) & (0,0) \\ (-1,0) & (2,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 8.

Здесь *M* не доминируется строго стратегией *u*, и *M* не доминируется строго стратегией *D*. Однако, если игрок 1 играет *u* с вероятностью *1/2* и *D* — с вероятностью *1/2*, он обеспечивает себе выигрыш *1/2* независимо от того, как играет игрок 2. Следовательно, чистая стратегия может строго доминироваться смешанной стратегией, даже если она не доминируется строго никакой чистой стратегией.

Введем следующие обозначения: пусть $i \in I$, тогда через $s_{-i} \in S_{-i}$ будем обозначать набор стратегий игроков из $I\backslash\{i\}$, (s'_i, s_{-i}) обозначает набор стратегий $(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$. Аналогично, для смешанных стратегий (σ'_i, σ_{-i}) — это $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma'_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$.

(Заметим, что в этих обозначениях $s = (s_i, s_{-i})$).

Определение 1.3.1. *Чистая стратегия S_i игрока i в игре Γ строго доминируема (строго доминируется), если существует другая чистая стратегия s'_i такая, что*

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \qquad (3.1)$$

для всех $s_{-i} \in S_{-i}$.

В этом случае говорят, что стратегия s'_i доминирует стратегию s_i. Стратегия s_i слабо доминируется, если существует такая s'_i , что (3.1) выполняется как нестрогое неравенство, но хотя бы для одного набора s_{-i} – неравенство строгое.

Аналогично определение и для смешанных стратегий.

Определение 1.3.2. Смешанная стратегия σ_i строго доминируется в игре $\tilde{A}$, если существует другая стратегия σ'_i такая, что для всех $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ выполняется

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \qquad (3.2).$$

Стратегия σ_i называется строго доминирующей стратегией для игрока *i* в игре $\tilde{A}$, если она строго доминирует любую другую стратегию из Σ_i.

Заметим, что для того, чтобы проверить, что σ_i строго доминируется стратегией σ'_i, нам нужно посмотреть на "поведение" этих двух стратегий против чистых стратегий оппонентов игрока *i*.

Формально:

$$(A) \quad u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_{-i}$$

тогда и только тогда, когда

$$(B) \quad u_i(\sigma_i', s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i}.$$

Действительно: рассмотрим разность

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) - u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \left(\prod_{k \neq i} \sigma_k(s_k)\right)[u_i(\sigma_i', s_{-i}) - u_i(\sigma_i, s_{-i})].$$

Тогда если (B), то (A), т.к. все $[u_i(\sigma'_i, s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i})] > 0$. (B) следует из (A), т.к. s_{-i} — вырожденный случай σ_{-i}.

Задача. Докажите, что если чистая стратегия s_i является строго доминируемой, то таковой же является и любая стратегия, использующая s_i с положительной вероятностью.

Однако смешанная стратегия может быть строго доминируемой даже, если она использует с положительной вероятностью чистые стратегии, которые даже не слабо доминируемы. Действительно, рассмотрим следующую игру (рис. 9).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ M \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (1,3) & (-2,0) \\ (-2,0) & (1,3) \\ (0,1) & (0,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 9.

Стратегия первого игрока (*1/2, 1/2, 0*) дает ожидаемый выигрыш *–1/2* вне зависимости от того, что играет игрок 2, а следовательно, строго доминируется стратегией *D*.

Естественно, что строго доминируемые стратегии надо удалять. Если игра разрешима в смысле последовательного удаления строго доминируемых стратегий, т.е. каждый игрок остается с единственной стратегией, как в нашем первом примере, то получившаяся ситуация будет хорошим кандидатом для предсказания того, как будет проходить игра.

Вернемся к игре, изображенной на рис. 7. Нетрудно убедиться в том, что здесь в результате последовательного удаления строго доминируемых стратегий остается пара стратегий *(u, L)*. На первом шаге удаляется стратегия *M* (она доминируется стратегией *R*).

Затем удаляется стратегия *m* (доминируемая стратегией *u*).На третьем шаге удаляется стратегия *d* (доминируется стратегией *u*). Наконец, на последнем шаге удаляется *R*.

Но, даже если такие ситуации представляют собой хорошие кандидатуры, все не обязательно произойдет в соответствии с их "предписанием", особенно если выигрыши могут принимать "экстремальные" значения.

Рассмотрим, например, следующую игру (рис. 10).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (20,10) & (15,20) \\ (-100,20) & (40,30) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 10.

Очевидно, что здесь стратегия *L* доминируется стратегией *R*, а потому ситуация *(D,R)* является хорошим кандидатом. Но ... Проигрыш игрока 1 в ситуации *(D, L)* слишком велик, поэтому вполне можно допустить, что игрок 1 может не рискнуть сыграть стратегию *d* (допуская, например, возможность случайной ошибки игрока 2).

Все, конечно, изменится, если игроки могут договориться до того, как принять решение. В этом случае, конечно, все уже будет зависеть от "силы" договоренности.

Последовательное удаление слабо доминируемых стратегий.

Рассмотрим следующую известную игру "Море Бисмарка". Предыстория события такова: 1943г. Адмирал Imamura получил приказ доставить подкрепление по морю Бисмарка на Новую Гвинею. В свою очередь адмирал Kenney должен был воспрепятствовать этому. Imamura должен был выбрать между Северным (более коротким) и Южным маршрутами, а Kenney — решить куда посылать самолеты, чтобы разбомбить конвой. Причем в течение одного дня самолеты могут бомбить лишь на одном из двух направлений — либо на Северном, либо на Южном маршрутах (но не на двух).

Поэтому, если Kenney посылает самолеты в сторону неправильного маршрута, то они могут вернуться, но число дней, когда возможна бомбежка, уменьшается. Описываемая ситуация моделируется следующей игрой. Считаем, что Северный маршрут займет 2 дня, а Южный — 3. (См. рис. 11).

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Imamura} \\ & & \begin{array}{cc}\text{Север} & \quad\text{Юг}\end{array} \\ \textit{Kenney} & \begin{array}{c}\textit{Север}\\[2ex] \textit{Юг}\end{array} & \begin{pmatrix}(2,-2) & (2,-2)\\[2ex] (1,-1) & (3,-3)\end{pmatrix}\end{array}$$

Рис. 11.

Вообще говоря — это матричная игра, т.е. антагонистическая игра с конечным множеством стратегий у каждого игрока. Ни один игрок не имеет доминирующей стратегии. Но здесь можно говорить о слабом доминировании: для Imamur'ы стратегия Юг слабо доминируема, так как для любой стратегии Кеппеу проигрыш Imamur'ы (число дней, когда конвой будет подвергаться бомбордировкам) не меньше для Ю, чем для С, но для стратегии Kenney Ю — проигрыш при С строго меньше, чем при Ю.

Последовательное (итерированное) удаление слабо доминируемых стратегий проходит следующим образом: исключается одна из слабо доминируемых стратегий одного из игроков, затем из оставшихся стратегий исключается одна из слабо доминируемых стартегий и т.д.

Представим себе, что Kenney понимает это и считает, что Imamura выберет Север. В этой новой ситуации Kenney имеет уже доминирующую стратегию — Север. Это и дает нам равновесие при последовательном удалении доминируемых стратегий. (В действительности, так и случилось: 2-5марта 1943 г. ВВС США и Австралии атаковали японский конвой, который шел по Северному пути и потопили все транспортные корабли и 4 эсминца: из 7000 чел. до Новой Гвинеи добрались 1000.)

Процедура последовательного удаления слабо доминируемых стратегий аналогична удалению строго доминируемых стратегий. Однако здесь есть одно весьма значительное отличие. А именно, множество стратегий, которые выдерживают последовательное удаление слабо доминируемых стратегий (то есть остаются) может зависеть от порядка удаления стратегий.

Действительно, рассмотрим следующую игру (рис. 12).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ M \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (1,1) & (2,1) \\ (0,0) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 12.

Если вначале удаляется *u* (слабо доминируется *M*), а затем *L* (слабо доминируется *R*), то мы приходим к исходу *(2,1)* (второй игрок выбирает *R*). Если же вначале удаляется *D* (слабо доминируется *M*), а затем *R* (слабо доминируется *L*), то мы приходим к исходу *(1,1)*.

Рассмотрим несколько примеров. Мы начнем со знаменитой Дилеммы Заключенного — в некотором смысле чрезвычайно простой игры, которая в разных формулировках встречается в большинстве учебников по теории игр, которая приводится едва ли не в самом начале каждого курса и которую многие сразу же вспоминают, когда слышат словосочетание "теория игр".

Дилемма Заключенного. Ставший почти хрестоматийным сюжет этой стилизованной истории таков. Двое подозреваемых в совершении тяжкого преступления арестованы и помещены в одиночные камеры, причем они не имеют возможности передавать друг другу какие-либо сообщения. Их допрашивают поодиночке. Если оба признаются в совершении преступления, то им грозит, с учетом их признания, тюремное заключение сроком по 6 лет каждому. Если оба будут молчать, то они будут наказаны за совершение какого-то незначительного преступления и получат в этом случае по 1 году тюремного заключения. Если же один из них сознается, а другой — нет, то первый, за содействие следствию, будет вовсе освобожден от наказания, тогда как второй будет приговорен к максимально возможному за данное преступление наказанию — 10-летнему тюремному заключению.

Описанная история может быть представлена следующей игрой (рис. 13).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad M & \qquad C \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-1) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-6,-6) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 13.

Здесь нетрудно убедиться в том, что стратегия "молчать" является строго доминируемой для каждого игрока (еще раз напомним, что они рациональны), поэтому каждый игрок выберет стратегию "сознаться". В результате оба заключенных получат по 6 лет тюремного заключения.

Как мы увидим ниже ситуация ("сознаться", "сознаться"), естественно, является ситуацией равновесия по Нэшу. При этом мы сразу же сталкиваемся с бросающейся в глаза проблемой: получающийся исход очень плохой — он дает максимальный суммарный срок заключения (разумеется, мы подчеркиваем это еще раз, не следует забывать предположение о рациональности игроков, поскольку здесь исключаются из рассмотрения проблемы предательства, и т. д.). Это послужило толчком к многочисленным исследованиям этой игры, поскольку, например, естественным желанием было бы получить в качестве исхода этой игры (или ее модификаций) ситуацию ("молчать", "молчать"), дающую каждому заключенному лишь по одному году заключения.

Следующая игра имеет уже ярко выраженный экономико-политический подтекст, хотя разделяет с дилеммой заключенного упомянутую выше специфику, поэтому мы позволим себе сохранить то же название:

"Дилемма заключенного - 2". Рассмотрим две страны добывающие нефть, которые мы назовем, скажем, A и B. Эти две страны могут кооперироваться, договариваясь об объемах ежедневной добычи нефти, ограничиваясь, к примеру, добычей 2 млн. баррелей нефти в день для каждой страны. С другой стороны, страны могут действовать некооперативно, добывая, скажем, по 4 млн. баррелей в день. Такая ситуация может быть представлена следующей игрой, в которой указаны прибыли стран, в зависимости от их объемов добычи нефти (рис. 14).

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \begin{array}{cc} \quad K \quad & \quad H \quad \end{array} \\ A & \begin{array}{c} K \\ \\ H \end{array} & \begin{pmatrix} (46,42) & (26,44) \\ & \\ (52,22) & (32,24) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 14.

Эта картина достаточно типична для картеля, когда у каждого из членов картеля есть стимул отклониться от договора, чтобы за счет увеличения объемов продаж получить дополнительную прибыль.

Легко видеть, что и здесь у каждого из игроков есть доминирующая стратегия — "не кооперироваться". В результате страны получают прибыль 32 и 24 (млн. долларов в день), что гораздо меньше, нежели в ситуации кооперативного поведения.

Феномен, с которым мы столкнулись в этом примере, аналогичен дилемме заключенного, и именно поэтому второй пример мы также назвали "дилеммой заключенного": оба игрока играют свои доминирующие стратегии, максимизируя тем самым свои выигрыши, но в то же время исход для каждого из них хуже, нежели в ситуации, когда оба следуют доминируемым стратегиям.

Можно ли достичь "кооперативного поведения" в дилемме заключенного? Как мы увидим в следующей главе — да.

Здесь мы ограничимся лишь еще одним примером на эту же тему.

"Дилемма заключенного - 3". Предположим, что есть 2 работника, которые могут "работать" ($s_i = 1$) и "увиливать" ($s_i = 0$) (s_i — уровень усилий, которые прикладывает работник *i*). Суммарный выпуск "команды" $4(s_1+s_2)$ делится поровну между работниками.

Каждый работник несет издержки равные 3, если работает, и равные 0, если увиливает.

Соответствующая матрица изображена на рис. 15.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & y \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (-1,2) \\ (2,-1) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 15.

"Работать" — строго доминируемая стратегия для каждого работника.

Аукцион второй цены. У продавца есть одна единица неделимого товара. Есть *n* потенциальных покупателей, которые оценивают товар, соответственно, в $0 < v_1 < \ldots < v_n$ и эти оценки являются "общеизвестными". Покупатели одновременно делают свои заявки (назначают цену) $s_i \in [0, +\infty)$.

Назначивший максимальную заявку получает товар и платит вторую цену, т.е. если игрок i выигрывает ($s_i > \max_{i \neq j} s_j$), то его полезность есть $u_i = v_i - \max_{i \neq j} s_j$, а остальные ничего не получают и ничего не платят (т.е. $u_j = 0$). Если несколько покупателей назначают высшую цену, то товар распределяется случайным образом (например, равновероятно).

Легко убедиться в том, что стратегия назначения своей оценки ($s_i = v_i$) слабо доминирует все остальные. Действительно, пусть $r_i = \max_{i \neq j} s_j$. Пусть $s_i > v_i$. Тогда, если $r_i \geq v_i$, то r-ый участник получает 0, что он получил бы и при $s_i = v_i$. Если $r_i \leq v_i$, то он получает $v_i - r_i$, что он опять же получает, назначив v_i. Если теперь $v_i < r_i < s_i$, то его полезность $v_i - r_i < 0$, а если бы он назвал v_i, то он бы получил 0. Аналогично и для $s_i < v_i$: если $r_i \leq s_i$ или $r_i \geq v_i$, то он получает ту же полезность, назвав v_i вместо s_i. Если же $s_i < r_i < v_i$, то он упускает возможность получить положительную полезность.

Полезно в данном случае заметить, что поскольку назначение собственной оценки есть доминирующая стратегия, то не играет роль, имеют ли покупатели информацию об оценках других.

Мы вернемся к аукциону второй цены в п. 1.6.

Рационализуемые стратегии.

Мы обсуждали исключение строго доминируемых стратегий, исходя из того, что рациональный игрок никогда не выбрал бы такую стратегию, вне зависимости от того, как играют его оппоненты. Однако "общее знание" структуры игры и того, что игроки рациональны, позволяет исключить больше, нежели просто последовательно удалить строго доминируемые стратегии, причем здесь опять же важную роль играет "общее знание". Далее мы рассматриваем смешанное расширение $\tilde{A}$ игры $Г$.

Определение 1.5.1. Стратегия σ_i является лучшим ответом игрока i на набор стратегий оппонентов σ_{-i}, если $u(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u(\sigma_i, \sigma_{-i})$при любых $\sigma_i \in \Sigma_i$. Стратегия σ_i является "никогда не лучшим" ответом (далее НЛО), если не существует σ_{-i}, для которых она была бы лучшим ответом.

Конечно же игрок не будет играть стратегию, которая является "никогда не лучшим ответом".

Ясно, что строго доминируемая стратегия является "никогда не лучшей".

Разумеется, может случиться, что стратегия будет "никогда не лучшим ответом", даже если она не является строго доминируемой (мы еще вернемся к этому). Таким образом, удаляя "никогда не лучшие ответы", мы должны удалить по крайней мере и все стратегии, удаляемые при итерированном (последовательном) удалении строго доминируемых стратегий. Более того, предполагая "общее знание", мы можем итерировать удаление "никогда не лучших ответов". Рациональный игрок не должен играть НЛО, как только он исключает возможность того, что его противники могут играть НЛО и т.д.

Стратегии, остающиеся после такого итеративного удаления, — это те стратегии, которые рациональный игрок может оправдать, или рационализовать, разумеется, при некоторых разумных предположениях о выборе своих противников.

Определение 1.5.2. Стратегии в Σ_i , которые выдерживают последовательное удаление НЛО называются рационализуемыми стратегиями.

Понятие рационализуемых стратегий было введено независимо Бернхеймом и Пирсом (Bernheim, 1984; Pearce, 1984).

Можно показать, что также, как и при последовательном удалении строго доминируемых стратегий, порядок удаления не существенен. Заметим, что множество рационализируемых стратегий не может быть шире, чем множество стратегий, "выживающих" при последовательном удалении строго доминируемых стратегий, поскольку на каждом шаге процесса, определяющего множество рационализируемых стратегий, все стратегии, строго доминируемые на данном шаге, удаляются.

Пример (Osborn, Rubinstein) (см. рис. 16)

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
(0,7) & (2,5) & (7,0) & (0,1) \\
(5,2) & (3,3) & (5,2) & (0,1) \\
(7,0) & (2,5) & (0,7) & (0,1) \\
(0,0) & (0,-2) & (0,0) & (10,-1)
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Рис. 16.

На 1 шаге исключения удаляется стратегия b_4, т. к. она является НЛО, поскольку она строго доминируется смешанной стратегией *(1/2, 0, 1/2, 0)* или *(2/3, 1/3, 0, 0)*. Как только исключено b_4 можно исключить a_4, т.к. она строго доминируется a_2 (поскольку b_4 удалена).

Но дальше мы уже не можем удалить ни одну стратегию, т.к. a_1 — лучший ответ на b_3, a_2 — на b_2 и a_3 — на b_1 . Аналогично остаются b_1, b_2, b_3. Таким образом, множество рационализуемых чистых стратегий есть $\{a_1, a_2, a_3\}$ для игрока 1 и (b_1, b_2, b_3) — для игрока 2.

Для каждой рационализуемой стратегии, игрок может построить последовательность "оправданий" своего выбора, без ссылок на убеждение в том, что другой игрок не будет играть НЛО стратегию. Например, в этой игре игрок 1 может оправдать выбор a_2 убеждением, что игрок 2 будет играть b_2, которое игрок 1 может оправдать убеждением, что игрок 2 будет думать, что он собирается играть a_2, что осмысленно, если игрок 1 убежден, что игрок 2 думает, что он, игрок 1, думает, что игрок 2 будет играть b_2 и т. д.

Мы отметили, что множество рационализуемых стратегий не больше, чем множество стратегий, остающихся после последовательного удаления строго доминируемых стратегий. Однако в случае двух игроков ($n = 2$) эти два множества совпадают, так как в игре 2-х лиц (смешанная) стратегия σ_i является лучшим ответом на некоторую стратегию противника, если σ_i не является строго доминируемой. Если чистая стратегия s_i игрока *i* является НЛО для любой смешанной стратегии оппонента, тогда s_i строго доминируется некоторой смешанной стратегией $\sigma_i \in \Sigma_i$.

Посмотрим это на примере (Mas-Colell, Whinston, Green) (см. рис. 17).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} U \\ M \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (10,1) & (0,4) \\ (4,2) & (4,3) \\ (0,5) & (10,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 17.

У игрока 1 — три стратегии *U, M* и *D*. *U* лучшая против *L*, но худшая против *R*, *D* лучшая против *R*, и худшая — против *L*. С другой стороны *M* "относительно неплоха" и против *L* и против *R*. Ни одна из этих трех стратегий не доминируется никакой другой. Но если разрешить игроку 1 рандомизацию, то игра *U* и *D* с вероятностями *1/2* каждая дает игроку 1 ожидаемый выигрыш *5*, вне зависимости от стратегии второго игрока, тем самым строго доминируя *M*.

Предположим, что выигрыши от использования стратегии *M* изменены так, что *M* не является строго доминируемой. Тогда выигрыши от *M* лежат где-то выше, чем линия, соединяющая точки, соответствующие стратегиям *U* и *D*. Здесь оси соответствуют ожидаемым выигрышам игрока 1 в случае, если игрок 2 играет *R* (ось u_L) и *L* (ось u_R) (см. рис.18).

Линия ab – это множество $\{(u_R, u_L) : \frac{1}{2}u_R + \frac{1}{2}u_L = \frac{1}{2}u_1(M, R) + \frac{1}{2}u_1(M, L)\}$

Является ли *M* здесь лучшим ответом? *ДА*.

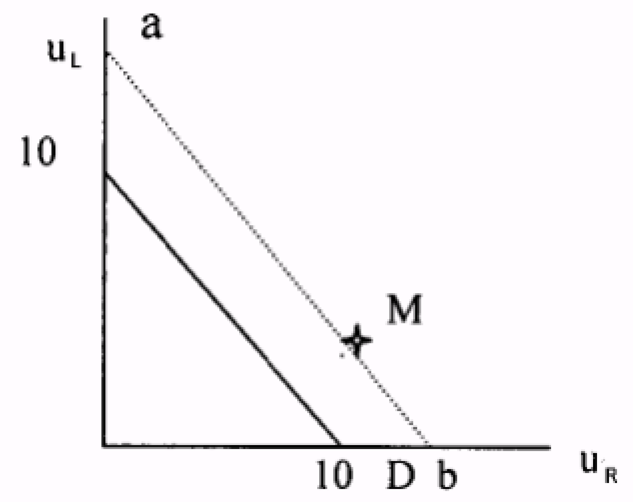

Рис. 18.

Действительно, заметим, что если игрок 2 играет *R* с вероятностью *$\sigma_2(R)$*, тогда ожидаемый выигрыш игрока 1 от выбора стратегии с выигрышами (u_R, u_L) есть $\sigma_2(R) \cdot u_R + (1 - \sigma_2(R)) \cdot u_L$. Легко видеть, что *M* — это лучший ответ на $\sigma_2(R) = 1/2$; он дает ожидаемый выигрыш, строго больший, чем ожидаемый выигрыш, достижимый с помощью стратегий *U* и/или *D*. (В случае *n > 2* это уже не так: могут быть стратегии, являющиеся НЛО, но не являющиеся строго доминируемыми; это связано с тем, что рандомизация независима).