Курс:

ТЕОРИЯ ИГР

Тема 6:

РАВНОВЕСИЯ НЭША

(продолжение)

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Сравнение с предыдущими понятиями. Равновесие Нэша тесно связано с предыдущими понятиями решения и хорошо согласуется с ними.

a) *Доминирующие стратегии.* Очевидно, что равновесие в доминирующих стратегиях является равновесием Нэша.

Впрочем, наряду с доминирующими равновесиями могут встречаться и другие, как правило, дурацкие. Рассмотрим, например, аукцион второй цены. Он интересен тем, что при его использовании у каждого участника есть доминирующая стратегия. Однако есть и много других, «плохих» равновесий Нэша. А именно (если участников > 3), для любого участника i и любого числа $p \leq u_i$ существует равновесие Нэша, при котором участник i получает предмет за цену p. Для этого все, кроме i-го, предлагают цену p, а он предлагает цену, большую $max(u_j)$. В этом «дурацком» равновесии предмет торга достается и дешевле, и не тому.

b) *Осторожные стратегии.* Осторожные стратегии в общем случае слабо связаны с равновесиями Нэша. Однако для антагонистических игр связь усиливается. Равновесие Нэша в такой игре является седловой парой (и обратно), поэтому равновесные стратегии являются осторожными. Однако если игра не имеет цены, то осторожные стратегии не образуют равновесие.

Отмечу еще, что в случае антагонистических игр равновесия Нэша обладают двумя дополнительным ценными чертами, вытекающими из того, что они состоят из осторожных стратегий.

Первая – что для нахождения равновесной (= осторожной) стратегии каждый из игроков может действовать индивидуально. В отличие от общего случая, ему не нужно знать или делать догадки относительно s^*_{-i}. Глядя только на таблицу (своих) выигрышей он может выделить множество P_i своих осторожных стратегий и выбрать произвольный элемент в нем в качестве s_i^*. В частности, множество NE равновесий Нэша устроено как произведение $P_1 \times P_2$ и любое равновесие дает участнику одну и ту же полезность.

Вторая – что равновесие обладает дополнительным свойством устойчивости. По определению, равновесие Нэша устойчиво по отношению к собственным отклонениям: если противник придерживается равновесной стратегии, то ваши отклонения от равновесия ничего не дадут. В случае осторожной стратегии любые отклонения противника не уменьшат ваш выигрыш, а могут только увеличить его.

Вернемся снова к общим играм. Имеет место следующее общее утверждение: равновесный выигрыш не может быть меньше гарантированного уровня α_i. Можно сказать, что Нэшевские исходы индивидуально рациональны.

Лемма. Если s_N^* - равновесие Нэша, то $u_i(s_N^*) \geq \alpha_i$ для любого игрока i.

В самом деле, сравним равновесную стратегию s_i^* с осторожной s_{*i}. Мы имеем $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_{*i}, s_{-i}^*) \geq \alpha_i$.

На самом деле верно (и столь же просто доказывается), что равновесные выигрыши не меньше β_i.

c) *Исключение доминируемых стратегий.* Наиболее интересна связь с исключением доминируемых стратегий. Как легко понять, сильно доминируемая стратегия не может быть равновесной. На самом деле верно более сильное утверждение: если стратегия входит в равновесие, то она выживает при последовательном исключении сильно доминируемых стратегий. Это следует из сделанного выше замечания и тривиальной Леммы.

Лемма. Пусть для каждого i заданы подмножества $S_i' \subset S_i$. Предположим, что s_N^* - равновесие в игре $(N, (S_i), (u_i))$, и кроме того $s_i^* \in S_i'$ для любого i. Тогда s_N^* является равновесием в игре $(N, (S_i'), (u_i|_{S_i'}))$.

Если G^∞ – игра, полученная после итеративного исключения сильно доминируемых стратегий, то предыдущее замечание дает включение

$NE(G) \subset NE(G^\infty)$.

На самом деле, можно показать, что любое равновесие в игре G^∞ является равновесием и в исходной игре G, т.е.

$NE(G) = NE(G^\infty)$.

Это равенство объясняет смысл исключения сильно доминируемых стратегий. Если после последовательного исключения остается один профиль, он равновесен в исходной игре. А если осталось несколько, надо среди них поискать равновесный.

Предыдущее относилось к сильному доминированию. Что касается слабо доминируемых стратегий, то, как мы уже говорили, они могут входить в равновесия.

Рассмотрим игру:

$1,1$	$100,0$
$0,100$	$100,100$

Здесь стратегия *s2* слабо доминируется стратегией *s1*, но пара *(s2,t2)* образует равновесие, причем неплохое.

Если мы выбросили некоторую слабо доминируемую стратегию (и обозначили полученную игру как G' то легко показать (покажите!), что

$NE(G') \subset NE(G)$.

По индукции мы имеем аналогичное соотношение после нескольких исключений. В частности, алгоритм Цермело-Куна для позиционных игр дает равновесия Нэша.

Равновесия Нэша и конкурентные равновесия. Конкурентные равновесия, которые встречаются в теории общего экономического равновесия, очень похожи на равновесия Нэша. Опишем в самых общих чертах общее равновесие. Там имеется несколько агентов, которые реагируя на цены p, принимают какие-то (оптимальные) решения x_i. Конкурентность проявляется в том, что они только реагируют на цены, но сами на них не влияют, не пытаются менять. Равновесие – когда решения x_i удовлетворяют неким балансам, например, когда $\sum_i x_i \leq 0$.

Тут полезно ввести фиктивного игрока 0, который контролирует цены и занимается достижением баланса. Обычно ему приписывается фиктивная полезность, равная $p(\sum_i x_i)$. Тогда равновесие Нэша $(p^*, (x_i^*))$ в этой вспомогательной игре дает конкурентное экономическое равновесие. В самом деле, по определению x_i^* - наилучшие ответы агентов при цене p^*, и остается проверить, что выполнены балансы. Если некоторые компоненты вектора $\sum x_i^*$ положительны, то оптимальное (для игрока 0) значение $p^*(\sum x_i^*) > 0$. С другой стороны из закона Вальраса стоимость $\sum x_i^*$ в текущих ценах равна 0. Полученное противоречие и дает, что $\sum x_i^* \leq 0$.

Приведенный выше трюк позволяет иногда устанавливать существование конкурентного равновесия.

Голосования с опросом. Идея, близкая к равновесию, применима и для исследования схем голосования. Пусть X - множество альтернатив (или кандидатов); у каждого игрока функция полезности u_i на X. Голосование производится путем заполнения бюллетеней; обычно они одинаковы для всех игроков, но мы все равно обозначим через S_i множество заполнений для игрока (избирателя) i. Схема голосования задается отображением $f{:}\times Si \to X$. Так возникает игра.

Однако в ней сложно разобраться, поэтому делается такой методологический трюк. Говорится, что «до голосования» производится опрос населения и эти результаты доводятся до сведения публики. Множество возможных результатов опроса обозначим Y; это может быть $\Delta(X)$ – предсказание о шансах кандидатов, а может быть предсказание о распределении голосов. Главный смысл опроса – что он помогает определиться избирателям, помогаем им решить, за кого голосовать (как заполнять бюллетени). Мы ударимся в крайность и будем считать, что у каждого избирателя есть своя функция $\phi: Y \to S_i$ (зависящая от предпочтений u_i). Тем самым определено отображение $\Psi: Y \to X$.

Как проводится опрос и как подводятся итоги, модель не уточняет. Вместо этого требуется, чтобы результаты опроса как-то согласовывались с реальным исходом голосования. Последнее задается отображением (быть может, многозначным) $\Psi: X \to Y$. Равновесием в такой системе называется пара (x^*, y^*)из реального исхода голосования x^* и опроса y^*, такая что $\Psi(x^*) = y^*$, а $\phi(y^*) = x^*$.