Курс:

ТЕОРИЯ ИГР

Тема 7:

РАВНОВЕСИЯ НЭША. ПРИМЕНЕНИЯ К ОЛИГОПОЛИИ.

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Равновесия Нэша незаменимы при изучении олигополии, когда несколько фирм конкурируют на одном рынке. Собственно, тут впервые это понятие и возникло (у Курно в 1838 г.), хотя и не было оформлено как теоретико-игровая концепция, потому что сама теория игр появилась только лет сто спустя.

Ограничимся для простоты двумя фирмами. Пусть их издержки (при выпуске товара в количестве q) задаются функциями $C_i(q)$. Каждая фирма независимо принимает решение о выпуске q_i. Полный выпуск $Q = q_1 + q_2$. Цена, по которой он может быть продан, задается (обратной) функцией спроса $P = P(Q)$. Поэтому прибыль каждой фирмы равна:

$$\pi_i = q_i P(q_1 + q_2) - C_i(q_i).$$

Каждая фирма стремится максимизировать π_i. Курно, который впервые исследовал эту задачу, предположил, что при этом выпуск другой фирмы неизменен. Поэтому условия максимизации первого порядка имеют вид:

$$P(q_1 + q_2) + q_i P'(q_1 + q_2) = (dCi/dqi)(qi).$$

Упростим все, считая издержки линейными, $C_{i(q)} = cq$, а $P(Q) = M - Q$ (так что M – это максимальная цена, по которой можно продать товар) . Тогда

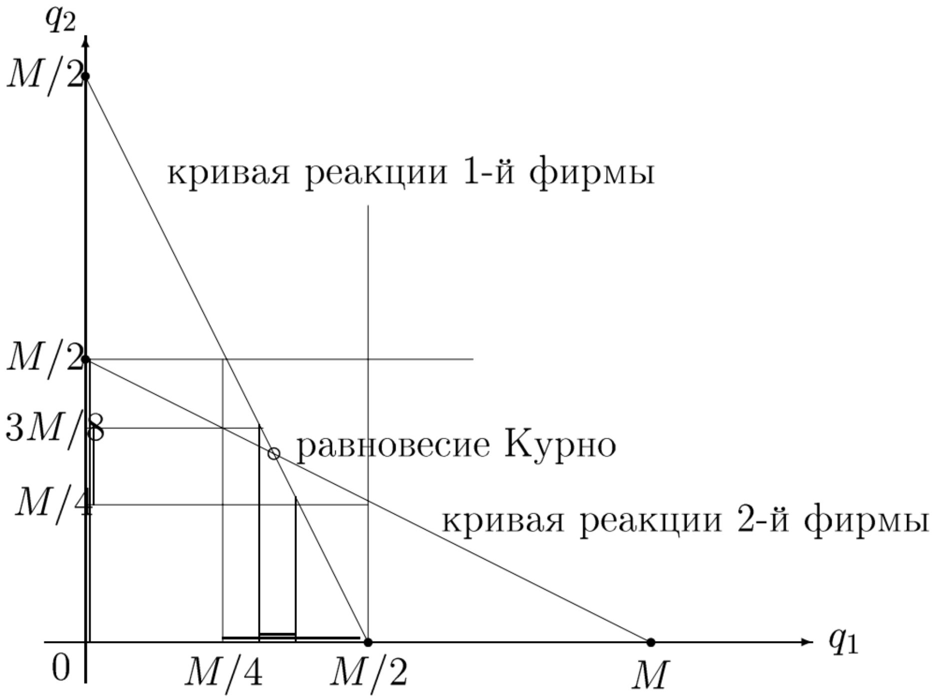
$$\pi_i(q_1, q_2) = (M - c - q_1 - q_2)\, q_i.$$

Найдем лучший ответ 1-й фирмы на выбор q_2. $\delta\pi_i/\delta q_1 = M - c - 2q_1 - q_2$; приравнивая его нулю, мы получаем

$q_1^* = R_{1(q_2)} = (M - c - q_2)/2.$

Аналогично для второй фирмы. Равновесие получается в точке пересечения кривых реакций, и $q_i^* = (M - c)/3$. Цены равны $p^* = (M + 2c)/3$.

Этот же результат можно получить методом последовательного исключения сильно доминируемых стратегий. Нужно нарисовать кривые реакции и постепенно стирать доминируемые стратегии; в пределе останутся равновесия.



Первая фирма видит, что вторая использует стратегии от 0 до *M/2*. Поэтому ее наилучшие ответы расположены на отрезке *[M/4,M/2]*. Соответственно наилучшие ответы второй фирмы находятся на отрезке *[M/4,3M/8]*. Тогда наилучшие ответы первой фирмы располагаются на отрезке *[5M/16,3M/8]*. И так далее. Эти вложенные отрезки сходятся к точкам *M/3*. Здесь для простоты $c = 0$.

Заметим, что если бы была монополия, т.е. одна фирма с теми же издержками, то ее прибыль максимизировалась бы при $q = (M - c)/2$ по цене $p^m = (M + \mathrm{c})/2$ (конечно, считается, что $M > c$). Т.е. при монополии цены выше, а выпуски меньше. При конкуренции цена $p^c = c$, а выпуск равен $M - c$. Кстати, конкуренцию можно рассматривать как олигополию с большим числом фирм.

Добровольное финансирование общественного блага. Представим, что группа индивидов имеет технологию, способную преобразовывать деньги t в общественное благо $y = f(t)$. Если трансферабельная полезность общественного блага для индивида i задается функцией $u_i(y)$, мы получаем игру. Стратегии игрока i задаются числами t_i (сколько он жертвует на общественное благо), а выигрыши измеряются функциями

$$u_i\left(f\left(\sum_j t_j\right)\right) - ti$$

После этого можно искать равновесия Нэша. Рассмотрим два более конкретных примера.

Пример 1. 20 соседей в деревне думают построить бассейн для купания. Полезность бассейна для каждого равна 16, а весь проект стоит 200. Что произойдет – сказать трудно, ибо имеется масса равновесий.

Пример 2. Картель из 9 фирм хочет протолкнуть законопроект, сулящий (в случае принятия) каждой фирме прибавок в 40 000 долларов. Для лоббирования этого законопроекта фирмы добровольно вносят по t_i тысяч. Вероятность прохождения проекта равна $p = t/(10 + t)$, где $t = \sum_i t_j$.

Найдем равновесие Нэша. Ожидаемый выигрыш фирмы равен (в тысячах долларов) $40(t/(10+t))-ti$. Дифференцируя, получаем $40\cdot 10=(t+10)^2$, т.е. $t=10$. Итого будет собрано 10 тысяч (в среднем с каждой фирмы по 1.100). Полная прибыль картеля составит 170 тысяч. В то же время оптимальный для картеля уровень затрат находится из максимизации функции $9\cdot 40(t/(10+t))-t$, что дает $t=50$ (примерно по 5.5 с фирмы). Полная прибыль картеля составила бы тогда $300-50=250$ тысяч.

Существование равновесий Нэша. Несомненно, одним из важных атрибутов любого понятия является его существование. Мы уже убедились, что равновесие Нэша – довольно разумное понятие, и поэтому пора более обстоятельно заняться его существованием. Понятно, что равновесий может не быть совсем. С другой стороны, мы знаем два частных результата о существовании:

1) если игра с нулевой суммой, то седловая точка дает равновесие;

2) алгоритм Цермело-Куна дает равновесие в «развернутой» игре с совершенной информацией.

Существование (и вычисление) равновесий в общем случае основано на анализе соответствий наилучших ответов. Раньше мы для каждого игрока i определили соответствие $Best_i: S_{-i} \Rightarrow S_i$, или подмножество $Best_i \subset S_N$. Так вот множество равновесий Нэша – это в точности общие точки всех $Best_i$.

Пользуясь этим, можно находить равновесия в биматричных играх. Нужно в каждом столбце отметить наилучшие ответы первого игрока, а в каждой строчке – наилучшие ответы второго. Пересечения и будут соответствовать равновесиям. Например, рассмотрим матричную игру

0♡	1	♣7
4	♣2♡	3
♣9	0♡	0♡

Здесь мы знаком ♣ отмечали лучшие ответы первого игрока, а знаком ♡ – лучшие ответы второго. Оба значка стоят в клетке с 2; это и есть равновесие Нэша в данной игре.

Это же показывает, почему равновесий может не быть – «скачки и дыры». Но если дыр и скачков нет, можно рассчитывать на существование равновесий. Классический результат в этом направлении установил Нэш в 1951 г.. Грубо говоря, он утверждает, что в выпуклой ситуации равновесия существуют.

Теорема Нэша. Предположим, что в игре $(N,(Si),(u_i))$ все множества S_i – выпуклые компакты, а функции выигрыша u_i – непрерывны и вогнуты по своей переменной (т.е. u_i вогнута по s_i). Тогда существует хоть одно равновесие Нэша.

Доказательство фактически уже приводилось в Лекциях о неподвижных точках. Напомним его основные моменты. Для каждой ситуации $s_N \in S_N = S_1 \times \cdots \times S_n$ и каждого игрока i рассмотрим его наилучший ответ $Best_i(s_N) = Argmax(ui(\cdot, s_{-i}))$. Это непустое (непрерывность u_i и выпуклое (вогнутость u_i) подмножество S_i. Рассмотрим теперь соответствие $F: SN \Rightarrow SN$, которое точку s_N переводит в множество $Best_i(s_N) \times \cdots \times Best_n(sN)$. Довольно легко проверить (проверьте!), что это замкнутое (или полунепрерывное сверху) соответствие. Поэтому применима теорема Какутани, которая утверждает существование неподвижной точки $s_N^* \in F(s_N^*)$. Понятно, что s_N^* будет равновесием Нэша.

Полезно сравнить этот результат с аналогичной теоремой фон Неймана в антагонистическом случае. Ясно, что теорема Нэша посильнее, тогда как теорема Неймана явно более «элементарная».

В общем случае следует ожидать, что существует *конечное* число равновесий, и что все они неоптимальны по Парето. В нашем примере с дуополией и финансированием общественного блага было именно так.