Курс:

# ТЕОРИЯ ИГР

Тема 8:

## РАВНОВЕСИЕ НЭША В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ.

Тлеужанова Манатжан Ашимкуловна

***Рандомизированные стратегии.*** Классическое применение теоремы Нэша относится к существованию равновесий в смешанных расширениях, или смешанных стратегиях. Как уже говорилось, многие игры не имеют равновесия (в чистых стратегиях). Рассмотрим игру

| | |
|---|---|
| 1,-1 | -1,1 |
| -1,1 | 1,-1 |

Знание игроком 1 хода игрока 2 позволяет ему добиться преимущества и получать выигрыш. Значит 2-му (как и первому) нужно скрыть свои намерения. Но где взять гарантии, что ваш противник не узнает ваш ход?

К счастью, есть способ сделать собственный выбор непредсказуемым (даже для себя!) – это сделать его случайным, использовать, как говорится, рандомизированную стратегию. Конечно, нужно позаботиться, чтобы противник не видел результатов работы вашего датчика случайных чисел.

Формально это означает, что игрок от множества «чистых» стратегий Si переходит к множеству «смешанных» стратегий Д(5). Выигрыши определяются с помощью ожидаемой полезности. Собственно, здесь впервые становятся важными численные значения выигрышей, а не соответствующие предпочтения. Переход от игры $G = (N, \{Si\}, (m))$ к игре $G^m = (N, (Д(6), (Ui))$ называется *смешанным расширением*.

***Смешанные равновесия.*** Так называются равновесия Нэша в смешанном расширении, или равновесия в рандомизированных стратегиях. Вообще, полезно сравнить исходную игру $G$ с ее смешанным расширением $G^m$. Например, как изменятся $\alpha_i$ и $\beta_i$. Нас же интересуют равновесия Нэша. Положение дел с равновесиями проясняют следующие утверждения.

***А) Лемма.*** *Каждое равновесие в игре $G$ является равновесием в смешанном расширении $G^m$.*

В самом деле, пусть $s_N^*$ – равновесие в $G$, т.е.

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

для любой (чистой) стратегии $s_i$ игрока $i$. Нужно проверить, что то же будет для любой смешанной стратегии $\sigma_i$. Но

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}^*) = \sum_{s_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)\sigma_i(s_i) \leq u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \sum_{s_i} \sigma_i(s_i) = u_i(s_i^*, s_{-i}^*).$$

Б) *Если профиль чистых стратегий $s_N$ является равновесием в $G^m$, то $s_N$ – равновесие в исходной игре $G$.*

Эти два утверждения можно выразить одной формулой:

$$NE(G) = NE(G^m) \cap S_N.$$

В) Могут появиться новые смешанные равновесия. Рассмотрим приведенную выше игру «орлянка», в которой нет чистых равновесий. В смешанных стратегиях равновесие есть: нужно первому использовать стратегию $0{,}5 \otimes s_1 + 0{,}5 \otimes s_2$, а второму также с равными шансами замешивать $t_1$ и $t_2$.

Г) Принципиальным фактом является то, что в рандомизированых стратегиях равновесия всегда существуют.

***Теорема*** (Нэш). Для любой конечной игры $G$ существуют равновесия в смешанном расширении $G^m$.

В самом деле, стратегические множества $\Delta(Si)$ игры $G^m$ – выпуклые компакты, а функции выигрыша $U_i$ – аффинны (значит вогнуты) по переменной $\sigma_i$ и непрерывны. Значит применима предыдущая теорема.

***Обсуждение смешанных равновесий.*** Нужно отдавать себе отчет, что использование рандомизированых стратегий само по себе не ведет к увеличению выигрыша. Смешанная стратегия не может дать больше, чем чистые стратегии из ее носителя. Напомним, что *носителем* рандомизированной стратегии $\sigma \in \Delta(Si)$ называется множество

$$supp(\sigma) = \{s_i \in S_i, \sigma(s_i) > 0\}.$$

Более того, если $\sigma_i$ – лучший ответ на $\sigma_{-i}$, то выигрыш при $\sigma_i$ равен выигрышу при использовании любой чистой стратегии из носителя $\sigma_i$.

Это очень важное место! Оказывается, у игрока $i$ (почти) нет никаких стимулов, чтобы выбирать именно равновесный набор вероятностей из $supp(\sigma_i^*)$. Все стратегии из $\Delta supp(\sigma_i^*)$ являются наилучшими ответами на $\sigma_{-i}^*$ .Это дает основания сомневаться в практической значимости смешанных равновесий. Если в игре нет чистых равновесий, это обычно говорит о том, что задача плохо поставлена.

Единственное оправдание смешанных стратегий в том, что они запутывают противника, порождают у него неопределенность, тревогу и вызывают нужную реакцию. «Ксенофонт писал, что знание того, что где-то находится отряд противника без знания его местоположения и сил, разрушает безопасность, и все места неизбежно становятся подозрительными» (Гюйбо). Вспомним в этой связи сказку Пушкина о золотом петушке.

***Блеф.*** Можно также сказать, что рандомизация – это математическое выражение идеи блефа. Поясним это неформальным обсуждением одной упрощенной карточной игры. Игроки (Джон и Мэри) ставят по рублю и затем Мэри получает случайную карту. Карта с равными шансами может быть хорошей или плохой. При хорошей карте выигрывает Мэри и может получить рубль. Однако, поглядев на карту, она может удвоить ставку. А Джон – принять это удвоение, или спасовать.

Если Мэри будет удваивать только при хорошей карте, это будет явным сигналом для Джона, что у нее хорошая карта, и он будет пасовать. В результате при хорошей карте Мэри выигрывает 1, а при плохой – проигрывает 1 (в среднем). Для получения более лучшего результата ей нужно блефовать, т.е. удваивать иногда и при плохой карте. Как часто – об этом и говорит смешанное равновесие.

Видимо, смешанные равновесия представляют интерес только в подобных многократно повторяющихся играх.

***Вычисление равновесий Нэша.*** Вообще, нет какого-то простого рецепта нахождения равновесий (смешанных), потому что это связано с нахождением неподвижных точек (с теоремой Какутани или Брауэра). Однако некоторые соображения могут оказаться полезными.

1) Первое из них – все то же исключение доминируемых стратегий. Иногда полезно использовать симметрию.

2) Второе связано с перебором вариантов. Множество тех чистых стратегий, которые входят с ненулевой вероятностью в равновесные стратегии (т.е. носитель), есть важный качественный аспект равновесия. Для нахождения равновесий можно для начала перебирать все подмножества $D_i \subset S_i$ и для каждого пытаться решить соответствующую систему равенств (и неравенств), приравнивая выигрыши некоторому (искомому) значению $\omega_i$. Более подробно, для каждого $i$ мы имеем следующую систему равенств

$$U_i(x, \sigma_{-i}) = U_i(y, \sigma_{-i})$$

для любых $x, y \in D_i$ и условия

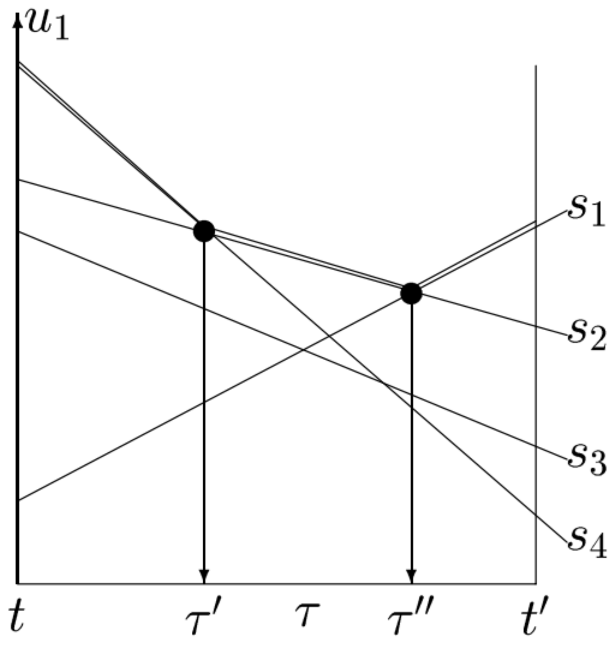
$$supp(\sigma_i) \subset D_i$$

(плюс, конечно, неравенства $U_{i(x, \sigma_{-i})} \geq U_i(z, \sigma_{-i})$ для $z \notin D_i$). Каждое $i$ дает $D_i - 1$ уравнение, так что уравнений столько же, сколько неизвестных. Получаются в общем случае нелинейные уравнения. Тем не менее в общем случае у них конечное число решений.

Конечно, для больших игр такой алгоритм работает плохо.

3) Положение чуть упрощается, если всего два игрока. Тогда приведенные выше уравнения (и неравенства) являются линейными. При этом если $D_1 \neq D_2$, то (снова в общем случае) решений нет. В самом деле, если $D_1 > D_2$, то мы получаем подсистему из $D_1$ уравнений с $D_2$ неизвестными.

4) Пусть снова два игрока, причем у второго всего две стратегии – $t$ и $t'$. Смешанная стратегия второго – точка $\tau$ на отрезке $[t, t']$. Тогда стратегии первого можно изображать как аффинные функции на этом отрезке, $S_i(t)$. Конечно, для любого $\tau$ есть наилучший ответ $s^*(\tau)$, единственный в случае общего $\tau$. И если $\tau$, в свою очередь, является наилучшим ответом на $s^*(\tau)$, мы получаем равновесие (в общем случае такое может случиться только когда $\tau = t$ или $t'$). Но в некоторых точках будет два (опять в общем случае) наилучших ответа первого игрока. Тогда нужно проверить это все на предмет наилучших ответов второго.




Например, в ситуации на рисунке есть два «подозрительных» значения $\tau$. Особенно просто все, когда и у первого две стратегии. Тут надо рисовать трехзвенные зигзаги. Мулен разбивает общие такие игры на три класса. Первый – когда у кого-то есть доминирующая стратегия (нетипичный представитель – Дилемма Заключенных). Второй – когда нет чистых равновесий (это «орел-решка»). Тут появляется одно смешанное равновесие. Третий – когда есть два чистых равновесия (типичный представитель – «семейный спор»). Кроме двух чистых, есть еще одно смешанное равновесие.

5) В случае антагонистической игры, если у одного (второго) игрока всего две стратегии, равновесия можно искать другим способом. Например, в задаче о блефе выигрыши Мэри – четыре строчки: $(0{,}0), (0{,}1/2), (1, -1/2), (1{,}0)$. Если нарисовать, мы получим отрезок, соединяющий $(0{,}1/2)$ с $(1{,}0)$; он пересекает биссектрису в точке $(1/3, 1/3)$. Отсюда видно цену игры (она равна 1/3 для Мэри) и равновесные стратегии. В частности, Мэри с вероятностью 1/3 должна блефовать, т.е. удваивать ставки несмотря на плохую карту.

***Пример.*** У хозяина работает работник; он может работать хорошо (Х) или сачковать (С). Хозяин может либо проверять его (П), либо нет (Н). Таблица выигрышей такова

| | Х | С |
|---|---|---|
| П | 10, 2 | 4, 0 |
| Н | 10, 2 | 4, 3 |

В этой игре два равновесия, но, конечно, хозяину лучше проверять.

Представим теперь, что у хозяина два работника, но проверить он может только одного (а выигрыши для хозяина складываются). Тогда у него есть два равновесия: проверять первого работника (и тогда первый старается, а второй сачкует; выигрыш хозяина равен 14) или проверять второго. Но представим, что хозяин использует смешанную стратегию и с равными вероятностями проверяет того и другого. Как легко понять, в этом случае каждый работник будет стараться, и хозяин получит выигрыш 20.

Не противоречит ли этот пример сделанному выше замечанию, что смешанная стратегия не может дать больше чистой?