Курс:

ТЕОРИЯ ИГР

Тема 9:

РАВНОВЕСИЕ НЭША (окончание).

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Еще раз доминирование. Я уже говорил, что при нахождении равновесий можно исключать (сильно) доминируемые стратегии. Все же стоит сказать об этом еще раз и поточнее.

В любой игре сильно доминируемая стратегия не может входить в равновесие по Нэшу. Иначе говоря, если $s_N^* = (s_N^*) \in NE(G)$, то для любого игрока i стратегия s_i^* не строго доминируется. Это очевидно.

Второе замечание относится уже к смешанному расширению. Пусть G^m – смешанное расширение (конечной) игры G. Пусть σ_i и σ'_i – две (смешанные) стратегии игрока i. Как понимать что σ_i доминирует σ'_i, на чистых стратегиях остальных, или на любых смешанных? Очевидно, что все равно как.

Третье замечание. Если в смешанную стратегию входит с ненулевой вероятностью сильно доминируемая стратегия, то и смешанная сильно доминируется. В самом деле, пусть $\sigma = \alpha \otimes s + (1-\alpha)\tau, \alpha > 0$ и стратегия s доминируется стратегией s' (можно даже смешанной). Тогда смешанная стратегия $\sigma' = \alpha \otimes s' + (1-\alpha)\tau$ (сильно) доминирует стратегию σ.

Собирая все вместе, мы получаем утверждение, обобщающее приведенный ранее факт: пусть множества S_i' содержатся в S_i и получены удалением сильно доминируемых стратегий. Тогда $NE(G'^m) = NE(Gm)$.

Если же мы удаляем слабо доминируемые стратегии, то имеет место формула
$NE(G'^m) = NE(Gm) \cap G'^m$.

Эффект фокальной точки. Как показывает игра «семейный спор», равновесий может быть много. Позже мы рассмотрим несколько утоньчений (рафинированний) Нэша, но даже эти рафинации могут быть множественными.

Когда равновесий много, позиции теоретика становятся шаткими. Любое из равновесий, ожидаемое игроками, обладает самооправдывающим свойством. Что же могло бы заставить игроков имплементировать некоторое специальное равновесие? Да любая вещь, заставляющая их фокусировать внимание именно на этом равновесии. Шеллинг в книге The Strategy of Conflict, Cambridge (1960), назвал это *эффектом фокальной точки*. Это любое свойство, выделяющее конкретное равновесие среди всех остальных. Им могут быть традиции, статус кво и т.п., то есть как правило, внемодельные вещи.

Фокальное равновесие может определяться и свойствами функций полезности. Рассмотрим игру – *дележка долларов*. Есть 100 долларов; каждый называет число от 0 до 100. Если сумма ≤ 100, каждый получает что просил; иначе по нулям. Есть масса равновесий (например, (91,9) и даже (100,100), но среди них есть и фокальное: (50,50), т.к. каждый игрок понимает, что это эффективное и справедливое решение. Конечно, это не значит, что любой эффективный и справедливый исход может быть равновесием.

С теоретико-игровой точки зрения культурные нормы – это правила, которые общество использует для выделения фокальных равновесий в конфликтных ситуациях. Например, правило ездить по дороге с правой стороны.

Бесконечные стратегии. До сих пор мы в основном рассматривали конечные игры. Сделано это было главным образом для простоты, чтобы избежать математических усложнений. Теперь мы кратко рассмотрим случай, когда множества стратегий S_i – метрические компакты. Грубо говоря, «все» результаты для конечных множеств остаются верными, когда условия конечности заменяются на компактность.

Прежде всего, нам нужно перенести определение $\Delta(X)$ с конечных множеств X на метрические компакты. Наметим вкратце, как это сделать. Первое: определим простые лотереи на X как конечные «выпуклые» комбинации $\sum_i \sigma_i \otimes xi\ (\sigma_i \geq 0, \sum \sigma_i = 1)$; множество простых лотерей обозначим $\Delta_0(X)$. Второе – перенесем на $\Delta_0(X)$ метрику ρ с X. Делается это так. Пусть μ и ν – две такие лотереи (или распределенные единичные массы). Расстояние между ними – это минимальная стоимость перевозки массы μ в ν, стоимость берется в "тонно-километрах". Наконец, $\Delta(X)$ – это пополнение $\Delta_0(X)$ в этой метрике. Мы автоматически получаем на $\Delta(X)$ метрику (продолжающую метрику ρ на X и называемую продолжением Канторовича-Рубинштейна) и компактность $\Delta(X)$.

Мы утверждаем, что если все стратегические множества S_i являются метрическими компактами (участников по-прежнему конечное число), а функции выигрыша непрерывны на произведении X_i (в топологии произведения), то существует (смешанное) равновесие Нэша.

Теорема (Гликсберг, 1952). Если стратегические множества S_i компактны, а полезности u_i непрерывны, то существует равновесие Нэша в рандомизированных стратегиях.

Доказательство. Можно воспользоваться «бесконечномерным» обобщением теоремы Какутани. Однако есть и более элементарный путь, который мы наметим в общих чертах. Он основан на конечной аппроксимации нашей (бесконечной) игры. Здесь полезно следующее понятие. Скажем, что ситуация s_N^* является ε-равновесием, если для любого игрока i и любой s_i

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^i\right) - \varepsilon$$

Приступим к доказательству. Так как функции выигрыша u_i непрерывные, они равномерно непрерывны, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что $|u_i(s) - u_i(s')| < \varepsilon$ при $\rho(s, s') < \delta$. Возьмем для каждого игрока i конечную δ-сеть $X_i \subset S_i$. Тогда можно рассмотреть конечную игру $(N, (X_i), (ui|xi))$ и в ней некоторое (смешанное) равновесие $\sigma_N \in xi\Delta(Xi)$. Конечно, этот профиль смешанных стратегий не обязан быть равновесием в исходной игре (точнее, в ее смешанном расширении). Однако, как легко понять, σ_N является ε -равновесием в G^m.

В самом деле, пусть σ_i – произвольная стратегия из $\Delta(S_i)$; мы утверждаем, что

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - \varepsilon \leq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Ясно, что мы можем считать σ_i простой смесью, то есть $\sigma_i = \sum \alpha(j)s(j)$, где $\alpha(j)$ – веса, а $s(j) \in S_i$. Если для каждой точки $s(j)$ взять ближайшую к ней точку $x(j)$ из X_i и образовать $\sigma'_i = \sum \alpha(j)x(j)$, то $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ отличается от $u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$ менее чем на ε. А $u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \leq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ уже из определения равновесия.

Итак, для каждого $\varepsilon > 0$ мы нашли ε-равновесие. Остается устремить ε к нулю и воспользоваться компактностью $\Delta(S)$.

Пример. *Китайский покер.* Чтобы вы не обольщались, приведу стандартный пример бесконечной игры, где равновесий (даже смешанных) нет. Два игрока, каждый называет натуральное число; назвавший меньшее число платит 1 рубль другому. Здесь множество S чистых стратегий – $\mathbb{N}$, конечно, это некомпактное множество. Ясно, что чистых равновесий здесь нет, и каждая стратегия (слабо) доминируется. Но в действительности нет и смешанных равновесий.

Отметим, что тут совершенно ясно, что считать смешанной стратегией, так что проблема не в этом. Смешанная стратегия σ – это последовательность $(\sigma(n))$ неотрицательных чисел, таких что $\sum_n \sigma(n) = 1$.

Почему же нет равновесий? Пусть ваш противник использует смешанную стратегию τ. Ваша стратегия будет наилучшим ответом только тогда, когда носитель вашей стратегии а расположен выше носителя τ; в противном случае вы можете улучшить свой ожидаемый выигрыш. В самом деле, пусть ваш (ожидаемый) выигрыш равен $1-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Возьмите целое число n такое что $\tau(n)+\tau(n+1)+\cdots < \varepsilon/2$ и примените чистую стратегию n. Ваш выигрыш в этом случае будет равен

$$\tau(1)+\cdots+\tau(n-1)-\tau(n+1)-\cdots,$$

что строго больше, чем $1-\varepsilon/2-\varepsilon/2 = 1-\varepsilon$. Итак, если у вас есть наилучший ответ, то носитель вашей стратегии расположен выше носителя противника. Но тогда ваш противник использует не оптимальную стратегию. Так что равновесий нет.

Равновесия в разрывных играх. В чем же дело? Что тут не подходит под теорему Гликсберга? Проще всего сказать, что множество $\mathbb{N}$ некомпактно. А если его компактифицировать? Тогда функции выигрыша будут разрывны.

Тем не менее даже в случае разрывных функций иногда бывают равновесия. Не претендуя на охват темы, рассмотрим один пример – «дикий» аукцион доллара, или «платят все». Есть $n > 1$ участников, они называют числа $x_i \geq 0$. Назвавший наибольшее число получает доллар (считается, что ценность его для всех равна 1), и каждый(!) платит x_i. Таким образом, выигрыш участника (мы пренебрегаем связками) i равен

$$u(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} -x_i, & \text{если } x_i < x^*_{-i} \\ 1 - x_i, & \text{если } x_i > x^*_{-i} \end{cases},$$

где $x^*_{-i} = \max(x_j, j \neq i)$. (Похожие функции выигрыша будут в олигополии Бертрана.) Довольно легко понять, что использовать числа > 1 смысла нет (хотя в реальных розыгрышах этой игры народ часто платил за доллар гораздо больше доллара!), поэтому в качестве множества стратегий S_i можно принять отрезок [0, 1].

Ясно, что равновесий в чистых стратегиях нет. Однако смешанные равновесия существуют; приведем одно. Оно будет симметричным и более того, размазанным по всему отрезку [0, 1]. Пусть $F(x)$ – функция распределения искомой смешанной стратегии (т.е. вероятность того, что $x_i \leq x$). Найдем ожидаемый выигрыш игрока i, когда он использует (чистую) стратегию x.

Его выигрыш равен $1 - \mathrm{x}$, если все остальные назвали числа, меньшие x (а вероятность этого равна $F(x)^{n-1}$), и равен $-x$ в противном случае. Таким образом,

$$Eu_i(x) = (1-x)F(x)^{n-1} - x(1 - F(x)^{n-1}) = F(x)^{n-1} - x.$$

Игрок включает в свою равновесную стратегию те x, которые дают ему максимум этой функции. По условию все x должны быть равновыгодными, т.е. все должны давать НУЛЕВОЙ ожидаемый выигрыш. Так мы получаем, что

$$F(x)^{n-1} = x, \text{ или } F(x) = x^{1/(n-1)}.$$

Как легко посчитать, $Ex_i = 1/n$ (грубо говоря, каждому игроку нужно называть примерно $1/n$), так что $E(\sum_i x_i) = 1$ и устроитель аукциона в среднем ничего не выигрывает! К сожалению (?), в жизни люди редко ведут себя в соответствии с этим правилом.