Курс:

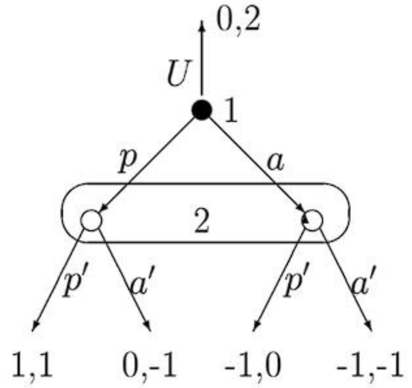
ТЕОРИЯ ИГР

Тема 11:

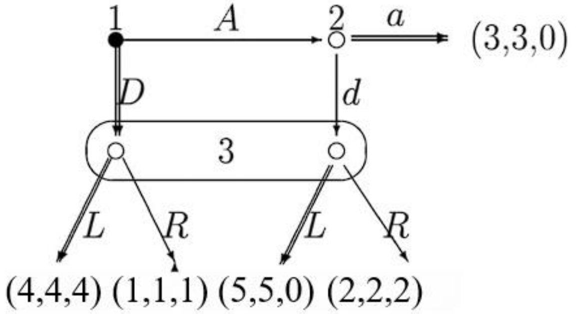
СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ.

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Недостаточность подыгр. Понятие совершенства равновесия по отношению к подыграм дает мощный принцип отсеивания «плохих» равновесий. Однако он плохо работает, если в игре мало подыгр. Это можно продемонстрировать на следующей модификации предыдущего примера.



По существу, это та же игра, однако теперь в ней нет собственных подыгр. Рассмотрим еще один пример (Селтен (1975)):



В ней имеется равновесие (D, a, L). Это равновесие совершенно, но только потому, что здесь нет собственных подыгр. Однако выбор вторым игроком стратегии a странен. Ведь если он уверен, что 3-й будет использовать L, то ему надо было бы выбрать d. Пусть даже шанс сделать ход для 2-го ничтожен, но d лучше a! И если он выберет d то 1-й переключится на A, а тогда 3-й переключится на R. Но тогда 2-й вернется к a, 1-й останется на A, и это дает второе равновесие (A, a, R).

Здесь нет подыгр, и буква определения молчит, но дух совершенства требует определенно и ясно: *игрок в любой позиции должен действовать оптимально*, даже если маловероятно, что удастся попасть в эту позицию. Как же придать этому смысл?

Рациональность и веры. Нужно ясно понимать, в чем заключается препятствие к понятию оптимального поведения в некоторой позиции. Мы уже отмечали, что выигрыш игрока i (контролирующего ход в позиции x) зависит от стратегий остальных. Но не это препятствие, потому что в духе равновесия Нэша тут предполагается, что стратегии всех остальных игроков фиксированы и известны. Главное препятствие в том, что выбор хода в позиции x автоматически меняет ход и во всех позициях из информационного множества $h(x)$. А значит и выигрыши на тех путях игры, которые проходят через другие позиции $\mathrm{x}' \in h(x)$. Поэтому мы не можем просто начать «подыгру» с позиции x, нужно начинать ее из информационного множества h.

Теперь основная неопределенность нашего игрока i заключается в том, в какой из позиций в h находится игра. Тут ничего не поделаешь, для разрешения этой неопределенности нужно задаваться «верой» на h. То есть игрок i должен задаться некоторой вероятностной мерой $\mu(h) \in \Delta(h)$. Как только такая вера задана, то можно образовывать ожидаемые выигрыши (в зависимости, скажем, от хода в h) и оценивать оптимальность используемого хода в h.

Заметим, что информационные множества других игроков могут «пересекать» нашу «подыгру» $G(h)$, начинающуюся из h, но это нас не должно волновать: ведь стратегии таких игроков фиксированы. А вот если информационные множества того же игрока i начнут вылезать из $G(h)$, это могло бы стать источником неприятностей. К счастью, для игр с совершенной памятью такого произойти не может.

Одним словом, чтобы говорить об оптимальности в каждой позиции, нужно задаться не только стратегиями σ, но и верами μ. И эти данные – стратегии и веры – должны быть согласованы друг с другом. Мы скажем подробнее об этом чуть ниже, а пока заметим только, что и классическое равновесие Нэша можно воспринимать в таком же духе.

Предположим, что для каждого игрока i заданы стратегия $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ и вера $\mu_i \in \Delta(S_{-i})$.

Они образуют равновесие Нэша, если: а) σ_i - наилучший ответ при вере μ_i,

и б) каждая вера μ_i - совпадает с $\bigotimes_{j \neq i} \sigma_i$.

Мы видим здесь согласование двоякого вида. Условия а) выражают рациональность каждого игрока при имеющихся верах. Условия б) говорят о формировании вер - они в точности совпадают с тем, что делают остальные, можно сказать - *истинные*.

В этом случае веры однозначно восстанавливаются по стратегиям (других игроков, заметьте!), и поэтому их можно исключить из определения. Однако в принципе можно было бы вместо б) накладывать и менее жесткие условия, например, что носитель σ_{-i} содержится в носителе μ_i (или наоборот).

Слабое секвенциальное равновесие. Как уже было сказано, секвенциальное равновесие состоит из данных двух типов - стратегий и вер. Более формально, *профиль (поведенческих) стратегий* образует семейство $\sigma = (\sigma_h, h \in H)$, где h пробегает множество H информационных множеств нашей развернутой игры, а $\sigma_h \in \Delta(M(h))$ (напомним, что $M(h)$ – множество ходов или акций, доступных в информационном множестве h). *Системой вер* называется семейство $\mu = (\mu(h), h \in H)$, где $\mu(h) \in \Delta(h)$.

Чтобы быть секвенциальным равновесием, пара (σ, μ) должна удовлетворять двум условиям вроде а) и б). Первое условие требует рациональность поведения каждого игрока в каждом «своем» информационном множестве. Предположим, что дано информационное множество h_0, контролируемое игроком i_0, и некоторая вера $\mu_0 \in \Delta(h_0)$. Пусть также задан некоторый профиль поведенческих стратегий $\sigma = (\sigma_h)$.

Определение. Скажем, что игрок i_0 *секвенциально рационален в инфомационном множестве* h_0 *при вере* μ_0, если, при фиксированных стратегиях остальных игроков, ожидаемый при вере μ_0 выигрыш игрока i_0 в подыгре $G(h_0)$, начинающейся в h_0, достигает максимума именно на стратегии $(\sigma_h, h \in Hi)$.

Фактически, при фиксации стратегий остальных, наша игра превращается в игру одного лица. Требуется, чтобы в подыгре $G(h_0)$ игрок i_0 вел себя оптимально. Отметим, что реальное ограничение здесь накладывают только $\mu(h_0)$ и смешанные ходы нашего игрока в информационных множествах h, расположенных после h_0.

Например, в игре «ослик Селтена» стратегический профиль (D, a, L) условию рациональности в вершине 2 не удовлетворяет: если 2-й игрок считает, что 3-й играет L, то он выберет d, а не a.

Определение. Профиль стратегий σ называется *секвенциально рациональным* относительно системы вер μ, если каждый игрок секвенциально рационален во всех своих информационных множествах h.

Второе условие (уже на веры) требует, чтобы веры μ были не произвольны, но оправдывались «более ранним» поведением σ хотя бы в следующем «слабом» смысле. Если информационное множество h достигается (при профиле стратегий σ) с положительной вероятностью, то вера $\mu(h)$ должна вычисляться по правилу Байеса. Если же информационное множество h лежит вне пути игры, вера $\mu(h)$ может быть произвольной. Будем говорить в этом случае, что веры *слабо согласованы* со стратегиями. Грубо говоря, вера не должна противоречить наблюдениям за ходом игры.

Такой набор (σ,μ) называется *слабым секвенциальным равновесием*. По существу это понятие (в сильном варианте) было введено Крепсом и Уилсоном в 1982 г. Отметим, что условие на веру $\mu(h)$ в информационном множестве h накладывают только смешанные ходы $\sigma_{h'}$, в множествах h', расположенных ранее h.

Секвенциальные равновесия и равновесия Нэша. Интуитивно ясно, что понятие секвенциального равновесия является усилением понятия равновесия по Нэшу. Во всяком случае мы видели в примере, что не всякое равновесие Нэша может быть поддержано системой вер до секвенциального.

Скажем точнее. Пусть σ - профиль поведенческих стратегий, образующий равновесие Нэша. Тогда правило Байеса однозначно определяет веры $\mu(h)$ в тех информационных множествах, которые достижимы (при стратегиях σ) с положительной вероятностью (лежат на пути игры). Тогда стратегии σ секвенциально рациональны в таких информационных множествах и при таких верах. В самом деле, в противном случае игрок, делающий ход в h, мог бы получить больший (условный, в «подыгре», начинающейся в h) выигрыш, изменив стратегии в этой подыгре.

Обратно, пусть σ - профиль поведенческих стратегий, секвенциально рациональных в информационных множествах, лежащих на пути игры. Мы утверждаем, что σ - равновесие Нэша. В самом деле, представим, что некоторый игрок i может улучшить результат, применив альтернативную стратегию σ_i'.

Но тогда он должен сыграть лучше σ_i в некотором своем информационном множестве h. Нужно взять самое первое такое множество; так как до него стратегии не менялись, то не менялись и веры. Но в таком случае стратегия σ_i была не секвенциально рациональной в этом h.

Так мы получаем следующее утверждение:

Теорема. *Профиль поведенческих стратегии σ является равновесием Нэша тогда и только тогда, когда найдется такая система вер μ, что*

(i) система μ слабо согласована с профилем σ;

(ii) профиль σ секвенциально рационален (при верах μ) во всех информационных множествах, лежащих на пути игры.

Отсюда можно сделать два важных вывода. Первый - вдоль пути игры (где веры однозначно определяются правилом Байеса) равновесные стратегии секвенциально рациональны. Второй - секвенциальная рациональность усиливает равновесность (по Нэшу) тем, что требует секвенциальную рациональность не только вдоль равновесного пути, но и во всех остальных информационных множествах. Этим она сближается с требованием совершенства относительно подыгр. И действительно, из приведенного выше предложения легко получить, что любое секвенциальное равновесие совершенно к подыграм.