Курс:

ТЕОРИЯ ИГР

Тема 12:

ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИГРЫ.

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

До сих пор мы рассматривали игры, которые играются «однократно»; игроки получают выигрыши и расходятся. Однако часто приходится многократно играть «одну и ту же игру» с теми же партнерами. Такую ситуацию называют повторяющимися играми, и им посвящено много исследований. Некоторые аспекты мы и рассмотрим.

Главный интерес повторяющихся игр связан с интуицией, что люди иначе ведут себя с теми, с кем ожидают поддерживать долговременные отношения. Если игра играется однократно, то игрок может безнаказанно нарушать любые предварительные договоренности. Вот почему редко равновесия бывают оптимальными. Однако если игра разыгрывается многократно, то некоторые соглашения могут стать равновесиями. Потому что нарушение соглашения в одном раунде может привести к наказанию в последующих раундах. К этому же относятся вопросы репутации. Например, репутация несгибаемого, жесткого, неисправимого может быть ценным активом в будущей игре.

Повторяющиеся игры. При рассмотрении повторяющихся игр нужно уточнить следующие вещи: длительность игры, наблюдения, стратегии и выигрыши.

1. Длительность. Игры могут играться фиксированное конечное количество раз. Или бесконечное. Возможен и более сложный случай, когда время игры рандомизировано.

2. Наблюдения. Возможность наказывать противника за нарушение соглашения основана на том, что вы знаете, как он играл на предыдущих раундах. Для простоты, мы будем считать, что вся прошлая информация (о ходах, выигрышах) доступна.

3. Стратегии. Это уже не просто последовательность ходов в каждом раунде; у вас появляется возможность делать выбор в зависимости от имеющейся информации. Для того, чтобы сделать это более ясным, рассмотрим двухкруговую игру.

Пусть нам дана какая-нибудь простая игра двух лиц со стратегиями $s1, s2$ и $t1, t2$. Было бы ошибкой считать, что стратегические возможности игроков исчерпываются множествами $S_i \times S_i$. Главная новость - что при совершении второго хода игрок может учитывать то, что произошло в первом раунде.

Произошедшее в первом раунде *(история)* задается множеством $S_1 \times S_2 = S$. Поэтому *стратегия* игрока 1 - это пара (s, f), где s - ход в первом раунде, а f - отображение из S в S_1, возможные его реакции на историю. В нашем примере реакций $2^4 = 16$, поэтому каждый игрок имеет 32 стратегии в двухраундовой игре.

Так что стратегий довольно много. Конечно, тут много лишнего. Например, зачем игроку реагировать на свою стратегию? Более естественно ограничиться отображениями f из S_2 в S_1, их уже только 4, так что множество стратегий каждого по существу состоит из 8 элементов.

Аналогично обстоит дело и в общем случае. Если исходная игра была $(N, (S_i), (u_i))$, то стратегия игрока i на $t + 1$-ом шаге - это отображение

$$f_i^{t+1}: S_N^t \to Si$$

Множество S_N^t (т.е. t-я степень S_N) есть множество всех историй развития игры до момента $t + 1$. А полная стратегия - это последовательность $f_i^{\cdot} = f_i^t$, где t меняется от 1 до T. Если дан профиль таких стратегий $f_i^{\cdot}, i \in N$, то индуктивно определяется последовательность ходов $s_i^t, t \in \{1, \dots, T\}$, где

$$s_i^1 = f_i^1, s_i^2 = f_i^2(s_N^1), \dots, s_i^{k+1} = f_i^{k+1}(s_N^1, \dots, s_N^k), \dots,$$

т.е. процесс игры.

Как видно, стратегий много и они могут описываться сложно.

4. Выигрыши. Наконец, нужно сказать про выигрыши. Если момент T окончания игры конечный, то с выигрышем все ясно: это суммарный выигрыш $\sum_{t=1}^{T} u_i(s_N^t)$, или лучше, средний выигрыш $(1/T)\sum_{t=1}^{T} u_i(s_N^t)$. Если случайный момент τ, то это ожидаемый средний выигрыш. Наиболее деликатным является определение выигрыша в случае $T = \infty$. Здесь обычно поступают одним из двух (или трех) способов.

Первый - образуют средний выигрыш $\sum_{t=1}^{T} u_i(s_N^t)\,/T$ и устремляют T к бесконечности. Небольшое препятствие состоит в том, что этот предел может не существовать. Тогда берут, например, нижний предел

$$U_i(f_N) = \underline{\lim}\left(\sum_{t=1}^{T} u_i(s_N^t)/T\right) \qquad (1)$$

при $T \to \infty$.

Второй способ - образовать дисконтированный выигрыш. Для этого фиксируют некоторый дисконт $\delta < 1$, и полагают

$$U_i(f_N^\cdot) = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}u_i(s_N^t) \qquad (2)$$

Умножение на $1-\delta = 1/(\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1})$ производится для удобства; тогда выигрыш можно рассматривать это как выпуклую смесь $u_i(s_N^t)$.

В случае $T = \infty$ получающаяся игра называется *суперигрой*. Итак, повторим, что набор суперстратегий $f_N^\cdot$ сначала преобразуется в последовательность ходов $s_N^t, 1 \le t \le T+1$, а она - в последовательность выигрышей $u_i(s_N^t)$, по которой уже определяется «средний» выигрыш $U_i(f_N^\cdot)$.

Повторяющаяся дилемма заключенных. Начнем с Дилеммы заключенных. Удобно ее задать так. Каждый из игроков обращается к Высшему существу с одной из просьб:

- дать его компаньону 2 доллара, или - чтобы оно дало ему самому 1 доллар. Таблица выигрышей имеет вид

	C	E
C	$2,2$	$0,3$
E	$3,0$	$1,1$

Стратегии E доминирующие и приводят к исходу $(1{,}1)$, что хуже кооперативного исхода $(2{,}2)$. Казалось бы, игрокам полезно сговориться и использовать стратегии C. Однако если игра происходит один раз, и игроки делают ходы независимо и одновременно, каждому выгодно перейти на стратегию E. Изменится ли ситуация, если они играют многократно?

Пусть сначала игра играется двукратно. Довольно ясно, что равновесная стратегия будет эгоистической. Во втором периоде каждому выгодно использовать E, независимо от того, что было в первом. Но тогда и в первом раунде играются стратегии E. То же заключение сохраняется при любой конечной продолжительности T.

Однако если игра продолжается бесконечно, ситуация кардинально меняется. Рассмотрим такую «свирепую» (grim, или триггерную) стратегию поведения 1-го игрока: придерживаться C, пока это делает игрок 2; и перейти на E, как только 2-ой применит E. Аналогично ведет себя второй игрок. Выигрыши будем определять по формуле (1). При использовании приведенных выше стратегий игроки в каждом раунде получают $(2,2)$, поэтому и их средний выигрыш равен $(2,2)$. Мы утверждаем, что это равновесие.

В самом деле, пусть первый игрок будет применять другую стратегию, а второй остается при старой, свирепой. Если на шаге T первый игрок впервые применит E, то последовательность его выигрышей имеет вид

$$2,2, \dots, 2,3, x_{t+1}, \dots,$$

где x_t при $t > T$ равны 0 или 1. Среднее значение будет ≤ 1, потому что бесконечный плохой хвост съест все преимущество, полученное на первых T раундах. Таким образом, отклонение от приведенной выше стратегии поведения не дает успеха первому. Аналогично для второго игрока.

Близкий результат дает и стратегия «зуб-за-зуб» - делать то, что ваш компаньон делал на предыдущем шаге.

Таким образом, на этом примере мы убедились, что бесконечное разыгрывание может привести к кооперативному поведению. Конечно, тут важно, что игра не имеет конца.

Дисконт. А что получится, если использовать в суперигре дисконтированную сумму выигрышей (2)? Если применяются указанные стратегии поведения, выигрыши снова равны $(2{,}2)$. Пусть первый отклоняется, и получается последовательность его выигрышей, как выше. Ее оценка равна

$$(1-\delta)(2+2\delta+2\delta^2+\ldots+2\delta^{T-1}+3\delta^T+[\text{нечто}\leq 1]\times\delta^{T+1}/(1-\delta))\leq$$

$$\leq(1-\delta)[2(1-\delta^T)/(1-\delta)+3\delta^T+\delta^{T+1}/(1-\delta)]\leq 2+\delta T-2\delta^{T+1}.$$

Поэтому если $2\delta>1$, т.е. если $\delta>1/2$, то отклонение невыгодно.

Вывод: при дисконте многое зависит от того, близок ли дисконт к 1. Если $\delta\approx 1$, то возможно кооперативное поведение. Напротив, если дисконт близок к 0, то в каждой партии игрок живет сегодняшним днем, мало думая о последствиях.

В чем же дело? Далее всюду мы будем предполагать, что дисконт равен 1 (т.е. пользоваться критерием среднего выигрыша). Вопрос, который я хочу обсудить - в чем же дело с такой разницей в ответе на Дилемму в случае $T<\infty$ и $T=\infty$. Что-то здесь неправильно - но где?

Видимо, нужно усомниться в ответе с конечным повторением. Мы видели, что он получен индукцией с конца (фактически это теорема: существует единственное совершенное (к подыграм) равновесие в конечно-повторяющейся Дилемме).

А это предполагает очень высокую, если не сказать - чрезмерную, степень рациональности.

Мало того, что игроки рациональны и что эта рациональность является общим знанием; эта убежденность в рациональности другого должна быть непоколебимой никакими фактами. И очень важно точное знание всеми конца игры.

Если же есть сомнения в длительности игры или рациональности оппонента, выводы при конечном (но большом) числе повторений могут приближаться к бесконечно повторяющимся. Допустим, что мой противник считает, что я буду применять свирепую стратегию: переключиться на E, как только он применит E. Хотя это и не лучшая моя стратегия. Тогда ему интереснее будет придерживаться стратегии C почти до самого конца игры. А в моих интересах - не разубеждать его относительно его иллюзии, и тоже играть C.

Так мы видим, что кооперация возможна и при конечном повторении Дилеммы. В реальных экономических играх бывает и то, и другое. Пиндайк и Рубинфельд приводят пример индустрии водомерных приборов, где есть молчаливая кооперация, и пример с авиаперевозками, где ее нет. Объяснение в последнем случае состоит в отсутствии прямых наблюдений стратегий. Поэтому неясно, почему конкурент меняет цены - то ли чтобы подрезать меня, то ли потому, что изменились издержки?