Курс:

ТЕОРИЯ ИГР

Тема 14:

ИГРЫ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ.

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Игры с неполной информацией. До сих пор при описании игры мы предполагали, что все игроки знают все о структуре игры (и что это даже общее знание), в частности, они знают выигрыши всех других игроков. Однако предположение это далеко от реальности; обычно мы весьма приблизительно представляем предпочтения других. Это же может относиться и к другим элементам игры, например, к знаниям о состоянии природы. Одним словом, игроки могут еще до начала игры иметь какую-то личную информацию, которая отсутствует у других. Другая информация известна всем, третья может открываться по мере развития игры.

Как же анализировать такие ситуации? Начнем с простого примера.

Пример. *Дуополия Курно с асимметричной информацией.* Дуополия Курно, рыночный спрос задается ценами $P(Q) = \mathrm{M} - Q$, где $Q = q_1 + q_2$ - суммарный выпуск двух фирм. Издержки (удельные) первой фирмы известны всем и равны c. Издержки (тоже удельные) второй фирмы равны либо c', либо $c''(c' < c'')$, с вероятностями θ и $1 - \theta$ соответственно. Вторая фирма знает точно свои издержки, но первая знает только вероятности θ.

Естественно, что вторая фирма будет вести себя по разному при больших или малых издержках. Обозначим эти количества q' и q'', выпуск первой фирмы обозначим q_1.

Вторая фирма при низких издержках c' решает задачу

$q(M-q-q_1-c') \to \max$,

и решение ее (как функция от q_1) равно $q' = (M-q_1-c')/2$.

Аналогично, $q'' = (M-q_1-c'')/2$.

Первая фирма не может различать эти случаи и должна выбирать единое q_1, ее задача

$$q_1\left[\frac{\theta(M-q_1-q'-c)}{2} + \frac{(1-\theta)(M-q_1-q''-c)}{2}\right] \to \max,$$

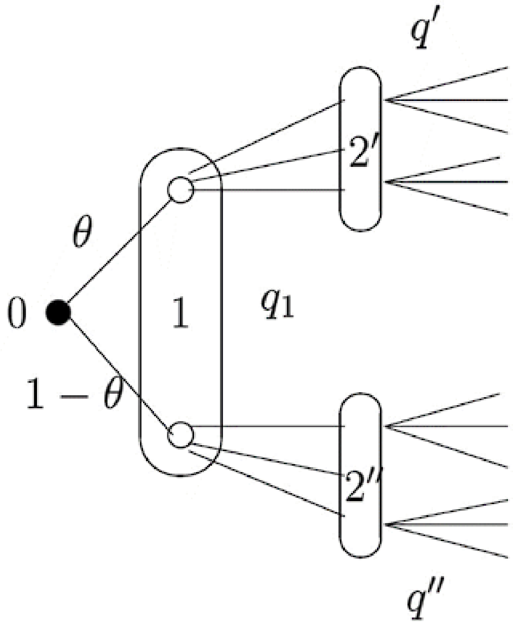
и решение

$q_1 = (M-c-\theta q' - (1-\theta)q''/2$. (мы всюду предполагаем решение внутренним). Ответ для первой фирмы такой:

$q_1^* = [M-2c-\theta c' - (1-\theta)c'']/3$,

и похожие ответы для второй фирмы ($(M-2c'+c)/3$ минус некоторый добавок в случае низких издержек и $(M-2c''+c)/3$ плюс некоторый добавок в случае высоких издержек). То есть выпуск второй фирмы больше при высоких издержках по сравнению со случаем полной информированности. (Почему? Потому что первая фирма из-за незнания снижает свой выпуск (ибо могло бы случиться, что у второй низкие издержки и она предложит больше на рынок), а поэтому вторая фирма может немного увеличить свой выпуск.)

Посмотрите, что мы сделали. Мы представили ситуацию с неполной информацией игрой в развернутой форме, где неполнота информации 1-й фирмы о типе 2-й фирмы выражается как несовершенство информации 1-ым игроком относительно хода природы. Несовершенство информации фирм относительно ходов друг друга отражается как обычно.



Развернутая игровая форма для дуополии. Выигрыши не указаны.

Байесовы игры. Харшаньи (1967-68) предложил общий способ представления игр с неполной информацией. Личная информация отражается при этом типом игрока, который включает в себя полезности, информированность и представления об остальных. Такое представление называется Байесовой игрой. Байесовы игры почти столь же просты, как и игры в нормальной форме.

Для задания Байесовой игры нужно указать множество игроков N, и для каждого игрока $i \in N$ задать множество его возможных *действии* A_i. Это все было раньше. Новым является задание для каждого игрока i множества возможных типов T_i этого игрока. Тип игрока отражает его полезности (выигрыши) и его информацию. Это делается с помощью функций полезности $u_i: A_n \times T_n \to \mathbb{R}$ (часто полезность u_i зависит только от типа игрока i) и с помощью его вер $p_i: T_i \to \Delta(T_{-i})$.

Поясним две последние вещи. С полезностями все ясно. Выигрыш игрока i зависит не только от выбора действий a_N (это было и раньше), но и от типа i (и, быть может, от типов остальных). Перед началом игры каждый игрок знает свой тип; что касается типов остальных игроков, то он имеет о них лишь вероятностные представления (веры). Представление (знание, вера) игрока типа t_i о типах остальных задается как вероятностная мера $p_i(t_i) = (p_i(t_{-i}|t_i))$ на $T_{-i} = \times_{j \neq i} T_j$.

Например, эта вера может быть его субъективным представлением, никак не связанным с реальным типом его партнера. Однако на практике обычно считается, что имеется некоторое априорное распределение вероятности P на T_N. И тогда индивидуальные вероятности p_i формируются как условные вероятности, т.е. $p_i(t_{-i}|t_i) = P(t)/\sum_{r_{-i}} P(r_{-i}, ti)$ для всевозможных $t = (t_i, t_{-i})$ и i. Эти данные (T_i, ui, pi) считаются известными всем и даже предполагаются общим знанием.

Как же мыслится развитие игры? Сначала природа (руководствуясь вероятностью P) выбирает тип t_N. Затем каждый игрок узнает свой собственный тип t_i и поэтому свою полезность и свои веры. После этого он должен выбрать свои действия (зависящие от его информации, то есть от типа t_i). Поэтому стратегией называют отображение $s_i: T_i \to A_i$ из типов в действия.

Могло бы показаться странным - зачем игроку нужно фиксировать весь свой набор действий при всевозможных его типах, когда он знает свой текущий тип и ему нужно выбрать соответствующее действие. Дело в том, что другие не знают его тип; чтобы им найти наилучший ответ, им нужно знать его действия во всех ситуациях. В примере с асимметричной дуаполией Курно первая фирма, чтобы найти оптимальный ответ, должна знать и q', и q''.

Байесовы равновесия. Что же считать равновесием в Байесовой игре $(N,(A_i,T_i,ui,pi,i\in N))$? Как обычно, взаимно наилучшие ответы. Пусть игроки выбрали по стратегии $s_i{:}\,T_i\to A_i$. Каков их выигрыш, точнее, каков выигрыш игрока i, имеющего тип $t_i\in T_i$? Еще более точно, как оценивает свой выигрыш такой игрок, *зная* стратегии s_{-i}? Представим на минуту, что он знает типы t_{-i} остальных игроков. Тогда он знает их действия $s_{-i}(t_{-i})$, и может посчитать свой выигрыш как $u_i(s_i(t_i),s_{-i}(t_{-i});(t_i,t_{-i}))$. Однако он не знает в точности t_{-i}, а знает только вероятности $p_i(t_{-i}|t_i)$. Поэтому он может посчитать *ожидаемое* значение своего выигрыша

$$U_i(s_N|t_i)=\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} p_i(t_{-i}|t_i)u_i(s_i(t_i),s_{-i}(t_{-i});(t_i,t_{-i}))$$

Теперь *равновесием (Байесовым)* будет такой набор стратегий s_N что для любого i, любого $t_i\in T_i$ и любой другой стратегии $r_i{:}\,T_i\to S_i$ выполняются неравенства

$$U_i(s_N|t_i)\geq U_i(r_i,s_{-i}|t_i).$$

Аналогично определяются равновесия в смешанных стратегиях.

Фактически мы превратили Байесову игру в обычную игру в нормальной форме и использовали в ней понятие равновесия Нэша. Более точно, мы ввели вместо каждого игрока i множество T_i его типов, так что число игроков резко увеличилось. Однако у каждого такого игрока стратегии старые - A_i. Есть другой, по существу эквивалентный способ образовать игру в нормальной форме. В ней множество игроков остается старым, но каждый игрок может действовать в зависимости от приходящей к нему информации (о его «типе», так что его стратегии - это отображения из T_i в A_i; выигрыш же он усредняет по всему множеству T_N. Тут полезно вспомнить об играх с сообщениями (или наблюдениями); единственное новшество здесь в том, что выигрыш может зависеть от типа (или наблюдения).

Аукционы. Понятие Байесова равновесия незаменимо при анализе аукционов. Начнем с простейшего примера.

Два покупателя (биддера) хотят купить некий предмет. Оценка предмета для каждого равномерно распределена на отрезке [0,1]. Действует аукцион первой цены (то есть предмет достается тому, кто предложит наибольший бид, и он платит предложенную цену; проигравший ничего не получает и не платит). Биддеры нейтральны к риску.

Чтобы сделать это Байесовой игрой, нужно уточнить действия, типы, веры и выигрыши. Тут все ясно. Стратегии - отображения отрезка в $\mathbb{R}_+$ (неявно это означает, что полезность предмета для продавца равна 0). Для упрощения будем искать равновесие в аффинных стратегиях; то есть $b_1(v_1) = a_1 + c_1 v_1$, где $c_1 > 0$, и аналогично для второго. (Конечно, выбирать оптимальную стратегию они могут как угодно, мы просто ищем равновесие такого специального вида.) Мы обнаружим, что в равновесии $b_i(vi) = v_i/2$. То есть агенты называют половину своей оценки.

Итак, пусть игрок j применяет стратегию $b_j(vj) = a_j + c_j v_j$. При данном v_i выигрыш игрока i равен

$$(v_i - b_i)\mathrm{Prob}(b_i > a_j + c_j v_j)$$

Ясно, что b_i нужно назначать на отрезке $[a_j, a_j + c_j]$, и что для таких b_i $\mathrm{Prob}(b_i > a_j + c_j v_j) = (b_i - a_j)/c_j$. Отсюда легко понять (максимизируя квадратичную по b_i функцию), что наилучший ответ $b_i(v_i) = (v_i + a_j)/2$, если $v_i > a_j$, и $= a_j$ в противном случае.

Мы видим отсюда, что $c_i = 1/2$, и что $a_i = a_j/2$. Так как симметрично $c_j = 1/2$ и $a_j = a_i/2$, то $a_i = a_j = 0$.

Конечно, если распределение оценок неравномерное, нужно искать решение в нелинейных стратегиях.