Курс:

ТЕОРИЯ ИГР

Тема 15:

ЗАДАЧА ТОРГА.

ТЛЕУЖАНОВА МАНАТЖАН АШИМКУЛОВНА

Начиная с этой лекции мы будем постепенно переходить к кооперативной теории. Центр внимания будет переноситься с индивидуальных действий на кооперативные. Соответственно акцент будет уже не на стратегиях, а на выигрышах, получаемых от совместных стратегий. Кооперация означает сотрудничество, совместные действия. Тут возможны два подхода. Первый - когда индивиды целиком растворяются в новом субъекте - коллективе, у которого как-то формируется своя цель, быть может, слабо связанная с целями индивидов. Мы не будем этим заниматься. Второй - когда индивидуальные интересы сохраняются, а кооперация совершается для того, чтобы всем «кооператорам» стало лучше. Вот это будет предметом нашего рассмотрения.

Мы начинаем со случая двух игроков (можно представлять, что жених и невеста обсуждают варианты брачного договора, или два компаньона обсуждают варианты контракта). Для постановки задачи нужно учесть две вещи. Первая - возможности, которые доставляет кооперация. Вторая - то, что произойдет при отсутствии кооперации, то есть что получают участники, действуя индивидуально.

Формальная задача. Два игрока. То, что могут получить игроки в результате совместных действий, изображается множеством X в $\mathbb{R}^2$ пространстве полезностей. Точка $(x_1, x_2) \in X$ означает, что имеется (за кадром) некоторое совместное действие, дающее в результате полезность x_1 первому и полезность x_2 второму игроку. Кроме того, указывается точка $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ *разногласия* (disagreement point) или *статус кво*. Она говорит, какую полезность получат игроки, если не смогут договориться.

Таким образом, формально *задача торга* - это пара (X, d) в пространстве $\mathbb{R}^2$. Обычно предполагается, что множество X замкнуто, ограничено (хотя бы сверху), выпукло, и что $d \in X$. Решить задачу торга - значит указать некоторую «хорошую» точку $x^* \in X$.

Вот некоторые примеры появления задачи торга.

1. Пусть дана игра двух лиц в нормальной форме. Тогда в качестве X можно взять множество $u(SN)$, состоящее из пар $(u_1(s_N), u_2(s_N))$, где s_N пробегает все стратегические профили. В качестве d берут обычно точку гарантированных выигрышей, т.е.

$$d_i = \alpha_i = \max_{s_i} \min_{s_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Заметим, что в общем случае d может не принадлежать X. Чтобы избежать этого неудобства, вместо множества $X = \{u(s_N), s_N \in S_N\}$ обычно рассматривают множество $X = \bigcup_{S_N}(u(s_N) - \mathbb{R}_+^N)$. Содержательно это означает, что если игрокам доступен некоторый дележ, то доступен и любой худший. Ясно, что такая модификация переговорного множества безобидна.

Интерпретация этой задачи такая. До игры игроки могут попытаться договориться относительно любого исхода. Если они договариваются, они заключают обязывающее соглашение. Если не договариваются, они должны независимо выбрать стратегии и получить результат. Можно надеяться, что он не будет хуже α_i (см. лекцию про осторожные стратегии).

2. Снова игра, но X состоит только из полезностей равновесных ситуаций; d как раньше. Заметим, что любое равновесие лежит «выше» d.

3. Вспомним про коррелированные стратегии. Это элементы из $\Delta(S_N)$. Если изображать выигрыши, мы получим выпуклую оболочку множества $u(S_N)$. Точка разногласия d как раньше.

4. Брать в качестве X множество полезностей для коррелированных равновесий; оно чуть меньше предыдущего. Это понимается так. Коррелированные равновесия предлагает посредник, арбитр. Но их много, какое же предложить? Арбитр может исходить при этом из соображений справедливости и эффективности.

И вообще, тут уместно говорить об арбитре, поэтому задачи торга часто называют *арбитражными схемами*.

5. Задача торга может возникать и сама по себе, без игры. Классическая задача – «поделим доллар». Двум участникам предлагают поделить между собой доллар; если они не договорятся, они не получат ничего. В зависимости от постановки можно считать, что X либо отрезок $\{(x_1, x_2), xi \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$, либо треугольник $\{(x_1, x_2), xi \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$. Здесь $d = (0,0)$.

6. Точка разногласия может формироваться и более сложно.

Решение задачи торга. Поговорим теперь о том, что следовало бы считать решением задачи торга. Мы уже говорили, что это означает выбор некоторой точки x из X. Но одни точки лучше для первого, другие - для второго, так что однозначного ответа ожидать трудно. Все же некоторые требования представляются естественными.

Первое. По самому смыслу точки разногласия решение x не должно быть хуже d. Это условие известно как требование *индивидуальной рациональности*. Никто не согласится получать меньше, чем при отсутствии соглашения.

Второе. Решение x должно быть Парето-эффективной точкой в X. В самом деле, арбитр, предложивший неэффективную точку, будет подвергнут критике и смещен.

Множество точек X, которые эффективны и индивидуально рациональны, иногда называют *переговорным множеством*. Это близко к понятию кривой контракта Эджворта.

Третье. Часто нужно предложить решение не для одной конкретной задачи торга, а для целого класса. И тогда естественным выглядит требование, чтобы решения отдельных задач были согласованы в каком-то смысле.

Итак, под решением задачи торга мы будем понимать следующее. Дан класс $\mathfrak{B}$ задач (X, d). *Решением* называется отображение $\phi\colon \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^2$, такое что $\phi(X, d) \in X$ для любого $X \in \mathfrak{B}$.

Утилитаризм и эгалитаризм. Как мы знаем, хороший выбор бывает при максимизации функции полезности. Поэтому можно зафиксировать некоторую функцию U на $\mathbb{R}^2$, и точку $\phi(X,d)$ искать как точку максимума U на X. Более точно, чтобы сразу удовлетворить условию индивидуальной рациональности, лучше искать максимум на множестве

$$X_d = \{x \in X, x \geq d\} = X \cap (d + \mathbb{R}^2_+).$$

Оно непусто, если $d \in X$. А чтобы получать эффективные точки, нужно требовать от U монотонность: U растет, если обе координаты точки возрастают.

Здесь сразу приходят на ум два простых принципа - *равной выгоды* и *наибольшего блага*. В первом случае участник говорит: «Вы должны сделать это для меня, потому что я делаю больше для вас»; во втором – «сделайте нечто, потому что это принесет мне пользы больше, чем вам – вреда». В первом случае мы приходим к *эгалитарному* решению, когда равны приращения по сравнению с d. Во втором - к *утилитарному*, когда максимизируется сумма $x_1 + x_2$. В первом случае максимизируется функция $\min(x_1 - d_1, x_2 - d_2)$.

Обобщение. В предыдущем случае как бы подразумевалось, что имеется общая единица для измерения полезностей обоих участников. Но можно делать то же самое, взвешивая полезности, т.е. учитывая полезности игроков с разными весами. Зафиксируем пару положительных чисел-*весов* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Определение. λ-*эгалитарным* решением называется точка из X_d, в которой достигает максимума функция $\min(\lambda_1(x_1 - d_1), \lambda_2(x_2 - d_2))$. Грубо говоря, это наилучшая точка, где $\lambda_1(x_1 - d_1) = \lambda_2(x_2 - d_2)$.

λ-*утилитарным* решением называется точка из X_d, в которой максимальна функция $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.

Отметим, что при росте λ_1 платеж 1-го участника убывает в λ-эгалитарном и возрастает в λ-утилитарном решении. Это намекает, что существуют такие веса λ, при которых λ-эгалитарное решение совпадает с λ-утилитарным. Такие веса λ дают *естественную шкалу* для задачи (X, d).

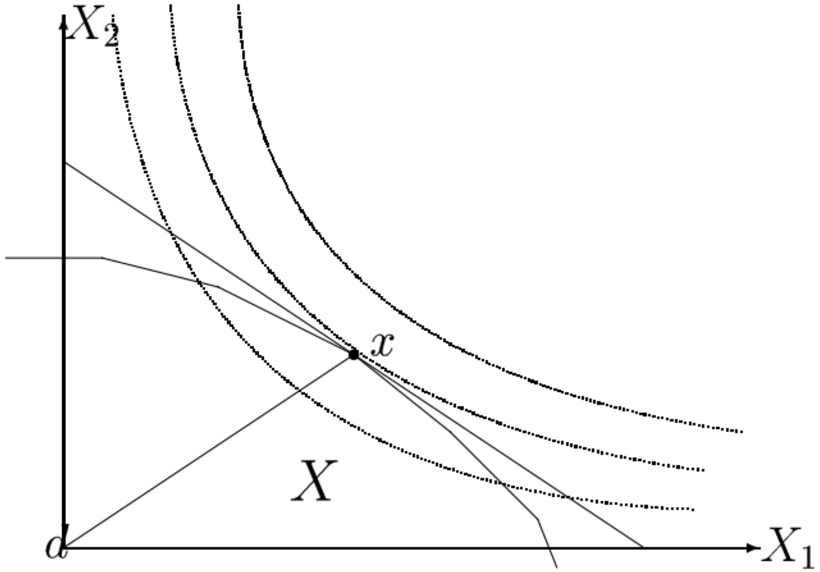
Решение Нэша. Впервые задачу торга рассмотрел Нэш, который и предложил интересное и наиболее популярное решение. Он ограничился следующим классом задач (X, d):

a) множества X выпуклые, замкнутые, нормальные и ограниченные сверху. Нормальность означает, что вместе с каждой точкой x множество X содержит и все меньшие точки. Ограниченность сверху можно понимать как существование такой точки $M \in \mathbb{R}^2$, что $X \leq M$.

b) точка d лежит во внутренности X.

В этой ситуации Нэш предложил в качестве решения точку из X, в которой достигает максимума т.н. *произведение Нэша*

$U(x) = (x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$.



Какими хорошими свойствами обладает решение Нэша?

Во-первых, оно единственно.

Во-вторых, оно не зависит от добавления констант к полезностям. Поэтому всегда можно считать, что точка d находится в нуле.

В-третьих, если мы проведем через точку-решение x касательную к гиперболе $X_1X_2 = x_1x_2$ (а она будет касательной и к множеству X), то отрезок касательной между координатными осями разобьется точкой x пополам. Это нетрудно подсчитать (см. рисунок выше).

Это означает, как легко понять, что решение не зависит и от выбора масштаба полезностей. Кроме того, это означает, что если в качестве λ_i взять $1/x_i$, то точка Нэша является одновременно λ-эгалитарным и λ-утилитарным решением. Выполняется также свойство симметрии: если множество X симметрично относительно диагонали (подразумевается, что $d = 0$), то $x_1 = x_2$. Наконец, это решение обладает следующим свойством *независимости от посторонних альтернатив*: если $Y \in X$ и $x = \phi(X, 0) \in Y$, то $x = \phi(Y, 0)$.

Нэш показал, что верно и обратное.