Лабораторная работа №3. Исследование типовых динамических звеньев и критерии устойчивости САУ.

1. Получение передаточной функции из системы дифференциальных уравнений состояния

Рассмотрим способ получения передаточной функции из системы дифференциальных уравнений состояния. Для этого необходимо:

1. записать уравнения пространства состояния в операторной форме.
2. выразить все переменные x через y и u.
3. подставив значения x в последнее дифференциальное уравнение системы, записать передаточную функцию, как отношение y к u.

1.1 Пример. Опередить передаточную функцию W(p), если известны дифференциальные уравнения состояния объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - x_2 - x_3 + 6u, \\ y = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Решение:

Запишем уравнения состояния в операторной форме:

$$\begin{cases} px_1 = x_2, \\ px_2 = x_3, \\ px_3 = -4x_1 - x_2 - x_3 + 6u, \\ y = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы выразим x_3:

$$x_3 = \frac{-4x_1 - x_2 + 6u}{p+1}.$$

Из второго уравнения системы запишем $x_3 = px_2$, тогда

$$px_2 = \frac{-4x_1 - x_2 + 6u}{p+1}$$

Из второго уравнения системы запишем $x_2 = px_1$, тогда

$$p^2 x_1 = \frac{-4x_1 - px_1 + 6u}{p+1},$$

или

$$x_1 = \frac{6u}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

Поставив x_1 в первое уравнение системы, получим:

$$x_2 = \frac{6pu}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

Поставив x_2 во второе уравнение системы, получим:

$$x_3 = \frac{6p^2u}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

Из выражения $y = x_1 - 2x_2 - x_3$ найдем

$$y = x_1 - 2x_2 - x_3 = \frac{6u}{p^3 + p^2 + p + 4} - \frac{12pu}{p^3 + p^2 + p + 4} - \frac{6p^2u}{p^3 + p^2 + p + 4}.$$

Таким образом, искомая передаточная функция равна:

$$\text{W(p)} = \frac{y}{u} = \frac{-6p^2 + 12p + 6}{p^3 + p^2 + p + 4}$$

1.2 Задания на самостоятельную подготовку

Опередить передаточную функцию *W(p)*, если известны дифференциальные уравнения состояния объекта:

$$1)\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 5x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 5u, \\ y = 0.1x_1. \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 + 2u, \\ y = x_1 + 2x_2. \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 7x_3 + u, \\ y = 2x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 0.5x_2 - 0.2x_3 + 3u, \\ y = x_1. \end{cases} \qquad 6)\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2 - 3u, \\ y = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

$$7)\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 3x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + u, \\ y = 2x_1 + x_2. \end{cases} \qquad 8)\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5u, \\ y = 3x_1. \end{cases}$$

$$9)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4u, \\ y = x_1.\end{cases}$$

$$10)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - 3x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + u, \\ y = 2x_2.\end{cases}$$

$$11)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2 + 4u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 - 5u, \\ y = x_1 - 2x_2.\end{cases}$$

$$12)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 0.5x_2 - 0.2x_3 + 3u, \\ y = x_3.\end{cases}$$

$$13)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2, \\ y = 3x_1 - x_2.\end{cases}$$

$$14)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 3x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + u, \\ y = 2x_1 + x_2.\end{cases}$$

$$15)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = 3x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5u, \\ y = 3x_1.\end{cases}$$

$$16)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = 5x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3u, \\ y = 3x_2.\end{cases}$$

$$17)\ \begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 6x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 + 4u, \\ y = x_3.\end{cases}$$

2. Частотные характеристики САУ

Формально для получения частотной передаточной функции надо сделать в $W(p)$ подстановку $p = j\omega$, и тогда полученная $W(j\omega)$ является комплексным выражением, которое можно представить в виде:

$$W(j\omega) = \frac{a_1(\omega) + jb_1(\omega)}{a_2(\omega) + jb_2(\omega)}. \qquad (2.1)$$

Для нахождения вещественной и мнимой частей частотной передаточной функции необходимо домножить числитель и знаменатель на сопряженную знаменателю величину, а затем провести разделение:

$$W(j\omega) = \frac{(a_1(\omega) + jb_1(\omega))(a_2(\omega) - jb_2(\omega))}{(a_2(\omega) + jb_2(\omega)(a_2(\omega) - jb_2(\omega))} = \qquad (2.2)$$

$$= \frac{a_1(\omega)a_2(\omega) + b_1(\omega)b_2(\omega)}{a_2^2(\omega) + b_2^2(\omega)} + j\frac{a_2(\omega)b_1(\omega) + a_1(\omega)b_2(\omega)}{a_2^2(\omega) + b_2^2(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

,

где

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \qquad (2.3)$$

- это амплитудно-частотная характеристика (АЧХ).

$$\psi(\omega) = \arg(W(j\omega)) = arctg\left[\frac{U(\omega)}{V(\omega)}\right] = arctg\left[\frac{b_1}{a_1}\right] - arctg\left[\frac{b_2}{a_2}\right], \qquad (2.4)$$

- это фазово-частотная характеристика (ФЧХ).

Графики функций $U(\omega)$ и $V(\omega)$ называют соответственно ***вещественной*** и ***мнимой частотной характеристиками.***

В практических расчетах удобно применять графики частотных характеристик, построенных в логарифмическом масштабе – ***логарифмические частотные характеристики*** (ЛЧХ) или (ЛАХ).

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) определяется следующим выражением:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) \qquad (2.5)$$

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФЧХ) называется график зависимости $\psi(\omega)$, построенный в логарифмическом масштабе частот.

Единицей $L(\omega)$ является децибел (дБ), а единицей логарифма частоты – декада. ***Декадой*** называют интервал частот, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что она изменилась на одну декаду.

Основное преимущество использования ЛЧХ заключается в том, что приближенные (асимптотические) ЛАЧХ типовых динамических звеньев изображаются отрезками прямых.

2.2 Задания на самостоятельную подготовку

Поведение системы описывается дифференциальным уравнением

$$a\frac{d^3y}{dt^3} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + y = d\frac{dx}{dt}.$$

Найти операторное уравнение и переходную функцию, комплексную частотную характеристику, вещественную (действительную) и мнимую частотную характеристику (ВЧХ, МЧХ), амплитудную, фазовую частотную (АЧХ, ФЧХ, АФЧХ) и логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАЧХ). Построить графики.

Вариант	*a*	*b*	*c*	*d*
1	2	5	6	9
2	3	7	9	12
3	8	9	12	15
4	11	20	11	6
5	12	5	7	14
6	8	4	3	7
7	10	9	8	10
8	5	7	4	11
9	4	9	3	16
10	6	3	6	17
11	9	11	7	3
12	15	12	10	2
13	7	13	16	8
14	3	18	7	5
15	5	20	3	15
16	6	24	5	23

Отчет содержит:

1. Указать: Выполнил: ФИО, ОП, курс

2. Задание 1 и 2 по варианту (дано/берілгені, решение/шешімі)

3. Список литературы/Әдебиеттер тізімі.