Лабораторная работа № 4. Разработка функциональной схемы САУ с использованием средств автоматизированного проектирования

1. Цели и задачи работы

В результате студент должен освоить методы определения устойчивости систем автоматического управления.

Для формирования умений студент должен уметь:

- строить графики, соблюдая требования к выбору масштаба, к обозначениям, к вычерчиванию кривых;
- вычислять определители.

2. Рекомендации при подготовке к практическому занятию

2.1. Вопросы, которые необходимо изучить при подготовке к практическому занятию:

- годограф,
- устойчивая САУ,
- неустойчивая САУ,
- характеристическое уравнение,
- квадрант.

2.2. Литература, которую необходимо изучить при подготовке к практическому занятию:

1. Гильфанов К.Х. Теория автоматического управления: Учеб. пособие. /Гильфанов К.Х., Подымов В.Н. − Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2009. – 176 с.

Глава 5. Стр. 89-99

2. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования. Учебное пособие / Бесекерский В.А., Попов Е.П. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб, Изд-во «Профессия», 2008. – 752 с.

Глава 6. §6.1-6.2. Стр. 115-128.

2.3. Ссылка на лекции:

Лекция 10. Понятие об устойчивости. Алгебраические критерии устойчивости.

3. Краткие сведения из теории

Устойчивость является необходимым критерием пригодности технической системы, ее работоспособности. Под устойчивостью понимается способность системы возвращаться после кратковременного воздействия в исходное состояние равновесия или близкое к нему.

Судить об устойчивости системы можно на основании анализа ее свободного движения, характеризующего состояние системы после снятия внешнего воздействия, а именно на основании решения однородного дифференциального уравнения динамики системы

$$a_0 y^n(t) + a_1 y^{n-1}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0$$

или характеристического уравнения

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1}(t) + \cdots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

получаемого либо из общего уравнения динамики системы приравниванием его левой части нулю, либо приравниванием нулю знаменателя передаточной функции замкнутой системы. Корни характеристического уравнения p_i определяют характер свободного движения системы.

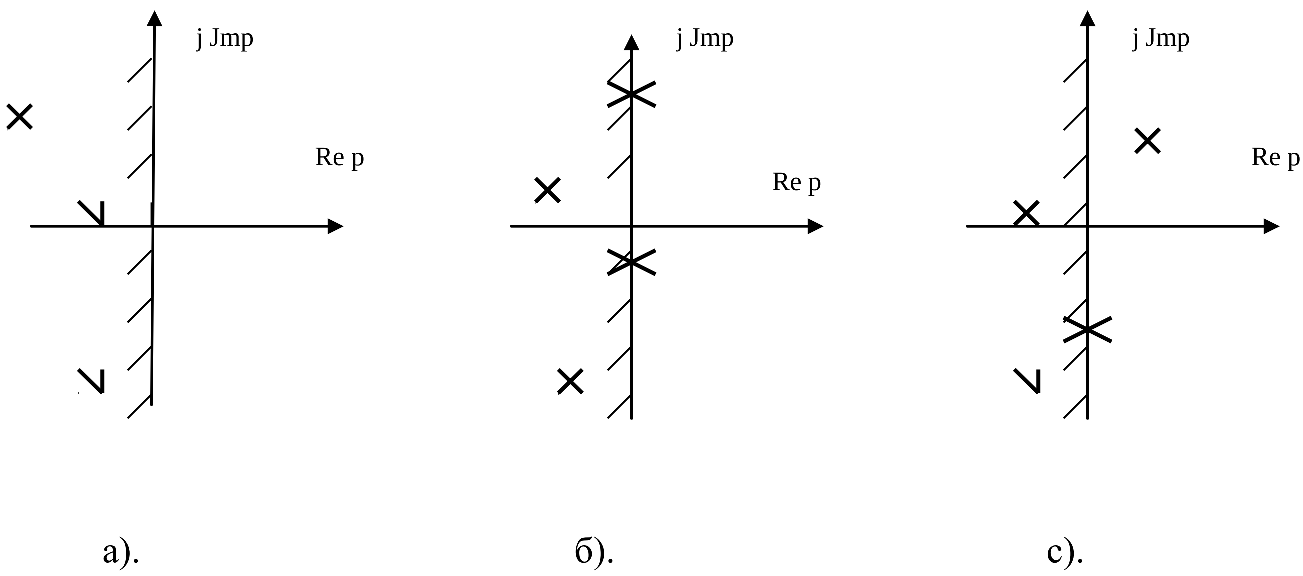

Рис.1. а). устойчивая система,
б). система находится на границе устойчивости
с). не устойчивая система.

Критерий устойчивости

Факт устойчивости системы можно установить без определения корней характеристического уравнения, пользуясь условиями, называемыми критериями устойчивости. Выделяют две группы критериев устойчивости: *алгебраические* и *частотные*.

Критерий Вышнеградского. По критерию система 3-го порядка устойчива, если все коэффициенты характеристического уравнения положительны и произведение коэффициентов средних членов характеристического уравнения превышает произведение коэффициентов крайних членов.

$$a_1 * a_2 > a_0 * a_3$$

Критерий Гурвица: для устойчивости системы (до 5-го порядка) необходимо и достаточно чтобы при $a_i > 0$ все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были положительны, т.е.

$$a_i > 0, \Delta_i > 0, (i = 1,n)$$

Матрица Гурвица составляется следующим образом: по главной диагонали матрицы выписываются слева направо все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n в порядке возрастания индексов; столбцы вверх от главной диагонали дополняются коэффициентами с последовательно возрастающими индексами, а вниз – коэффициентами с последовательно убывающими индексами; на место коэффициентов с индексами больше a_n и меньше нуля проставляются нули.

Матрица Гурвица

$$\Gamma = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \Delta_2;$$

или $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$;

Если $\Delta_n = a_n$ и $\Delta_{n-1} = 0$, а все миноры низшего порядка положительны,то система находится на границе устойчивости, при $a_n = 0$ – на границе апериодической устойчивости, а при

$\Delta_{n-1}=0$ – на границе колебательной устойчивости.

Пример 1.

Дана передаточная функция системы: $W(p) = \dfrac{k}{Tp^2 + p}$, где $T = 0{,}2$.

Требуется определить устойчивость системы по комплексным корням характеристического уравнения.

Решение

Полиномы числителя и знаменателя имеют вид:

$$E(p) = k, \qquad D(p) = Tp^2 + p \ .$$

Характеристическое уравнение разомкнутой системы $D(p) = 0$, то есть,

$$Tp^2 + p = 0 \ .$$

Корни этого характеристического уравнения действительные:

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = -\frac{1}{T} = -5;$$

Отобразим корни на комплексной плоскости:

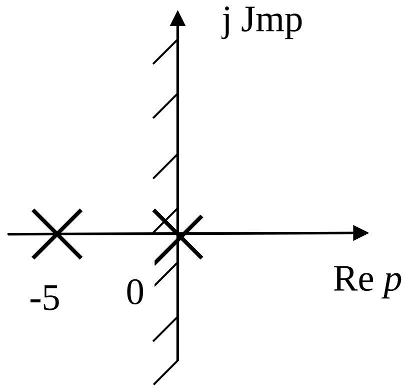

Рис.2.

Система находиться на границе устойчивости, т.к. имеется корень, расположенный на мнимой оси.

Пример 2.

С помощью алгебраического критерия Гурвица исследовать на устойчивость АСР с характеристическим уравнением

$$8p^4 + 2p^3 + 4p + 1 = 0.$$

Решение

Определим коэффициенты матрицы Гурвица:

$a_0 = 8$; $a_1 = 2$; $a_2 = 0$; $a_3 = 4$; $a_4 = 1$.

Матрица Гурвица:

$$\Gamma = \Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$\Delta_1=8$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 2*0 - 4*8 = -32;;$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4*(-28) = -112$;

Так как все коэффициенты характеристического уравнения положительны, но главные диагонали < 0, то система не устойчивая.

3. Содержание занятия

Задания по тематике.

Задача1.

С помощью алгебраического критерия Гурвица исследовать на устойчивость АСР с характеристическим уравнением:

а). $5p^4 - 2p^2 + 3p - 1 = 0$; б). $36288p^3 + 2102p^2 + 14{,}4p + 1 = 0$.

Задача 2.

Исследуем на устойчивость АСР, описывающуюся дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_3 y(t) = b_0 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dz(t)}{dt},$$

где

$$a_0 = 18;\ a_1 = 7;\ a_2 = 5;\ a_3 = 1,$$

посредством алгебраического критерия Вышнеградского.

Задача 3.

Инерционное звено последовательно соединяется с интегрирующим звеном.

Передаточные функции звеньев $W_1(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}$, $W_2(p) = \frac{k}{p}$. Система замыкается отрицательной обратной связью. Определить устойчивость системы по комплексным корням характеристического уравнения.

Параметры системы:

а). $k = 2$, $T_1 = 4$, $T_2 = 1$; б). $k = 0.5$, $T_1 = 1$, $T_2 = 4$.

Задача 4.

Звенья, передаточные функции которых

$$W_1(p) = \frac{k_1(T_0 p + 1)}{T_0 p} \quad \text{и} \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1},$$

соединяются последовательно. Выяснить, будет ли такая система устойчивой? Какую величину имеет постоянная времени T_0 на границе устойчивости замкнутой системы?

Задача 5.

Выяснить, будет ли устойчивой система с характеристическим уравнением

$$5p^4 + p + 2 = 0 .$$

5. Контрольные вопросы по теме занятия

5.1. Понятие об устойчивости.

5.2. Характеристическое уравнение.

5.3. Определение устойчивости по корням характеристического уравнения.

5.4. Формулировка критерия Вышнеградского.

5.5. Формулировка критерия Гурвица.