Лабораторная работа № 5. Проектирование средств автоматизации в программной среде Matlab/Simulink

1. Цели и задачи работы

В результате студент должен освоить методы определения устойчивости систем автоматического управления.

Для формирования умений студент должен уметь:

- строить графики, соблюдая требования к выбору масштаба, к обозначениям, к вычерчиванию кривых;
- вычислять определители.

2. Рекомендации при подготовке к практическому занятию

2.1. Вопросы, которые необходимо изучить при подготовке к практическому занятию:

- годограф,
- устойчивая САУ,
- неустойчивая САУ,
- характеристическое уравнение,
- квадрант.

2.2. Литература, которую необходимо изучить при подготовке к практическому занятию:

1. Гильфанов К.Х. Теория автоматического управления: Учеб. пособие. / Гильфанов К.Х., Подымов В.Н. − Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2009. – 176 с.

Глава 5. Стр. 99-107.

2.3. Ссылка на лекции:

Лекция 11. Понятие об устойчивости. Частотные критерии устойчивости. Критерий Михайлова.

3. Краткие сведения из теории

Критерий Михайлова.

Устойчивость системы выясняется по характеристическому полиному передаточной функции:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n \;, \qquad (2.5)$$

где n – степень полинома.

Полагая $p = j\omega$, преобразуем характеристический полином в комплексный частотный полином:

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(j\omega) + a_n .$$

В зависимости от степени числа $(j\omega)^n$ оно либо действительное, либо мнимое. По этой причине частотный полином распадается на действительную часть $U(\omega)$ и мнимую часть $V(\omega)$:

$$D(j\omega) = U(\omega) + j\,V(\omega)\,, \qquad (5.7)$$

$$U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots \qquad (5.8)$$

$$V(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \ldots . \qquad (5.9)$$

$U(\omega)$ – четная функция ω, $V(\omega)$ – нечетная функция ω. По этому признаку полиномы (5.8) и (5.9) можно назвать «четный» и «нечетный».

Можно дать три формулировки критерию Михайлова.

Первая формулировка. Если при изменении частоты от нуля до бесконечности годограф Михайлова начинается на действительной оси в точке a_n, последовательно проходит против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости, не проходя через ноль, и уходит в бесконечность в n-м квадранте, - система устойчива.

Вторая формулировка. Если при изменении частоты от нуля до бесконечности вектор комплексного частотного полинома $D(j\omega)$ последовательно поворачивается против часовой стрелки на угол $n(\pi/2)$, где n – степень характеристического полинома, и нигде не становится нулем, - система устойчива.

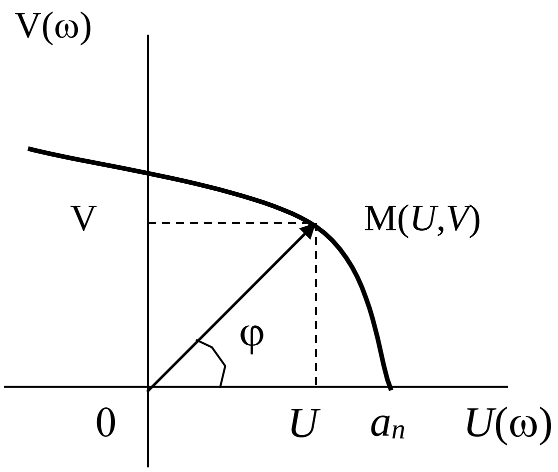

Рис.5.1.

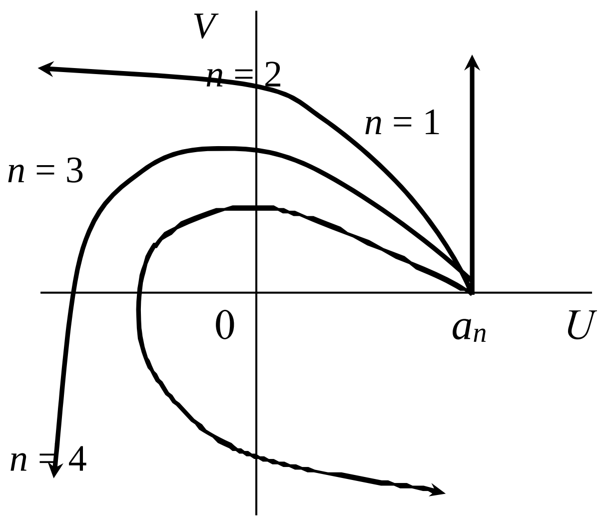

Рис. 5.2.

Третья формулировка критерия Михайлова: если частоты пересечения годографа с осями координат чередуются и образуют возрастающую последовательность вида $\overline{\omega_1} < \overline{\omega_2} < \overline{\omega_3} <\ldots< \overline{\omega_n}$, - система устойчивая.

В отличие от предыдущих, третья формулировка позволяет исследовать устойчивость системы без построения годографа, аналитически.

Пример 1.

Разомкнутая система имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{10(0{,}1p+1)}{0{,}009p^3 + 0{,}02p^2 + 0{,}1p}.$$

Выяснить устойчивость замкнутой системы.

Решение.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$0{,}009p^3 + 0{,}02p^2 + 1{,}1p + 10 = 0.$$

Комплексный частотный полином, нечетный и четный полиномы:

$D(j\omega) = -j\,0{,}009\omega^3 - j\,1{,}1\omega + 10 - 0{,}02\,\omega^2$,

$V(\omega) = 1{,}1\omega - 0{,}009\omega^3$,

$U(\omega) = 10 - 0{,}02\,\omega^2$.

Частоты пересечения:

$V(\omega) = 0$, $\overline{\omega}_1 = 0$, $\overline{\omega}_3 = 11{,}0$.

$U(\omega) = 0$, $\overline{\omega}_2 = 22{,}4$.

Требование чередования частот при последовательном возрастании не выполняется:

$\overline{\omega}_1 < \overline{\omega}_2 > \overline{\omega}_3$.

Следовательно, система неустойчива.

Подтверждение этому получим, вычислив значения угла поворота вектора $D(j\omega)$ при частотах пересечения с осями. Запишем тангенс аргумента:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega(1{,}1 - 0{,}009\omega^2)}{10 - 0{,}02\omega^2}.$$

Вычисляем: $\omega_1 = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0°$.ω_2
$= 22{,}4$, $\operatorname{tg}\varphi = -\infty$, $\varphi_2 = -90°$.
$\omega_3 = 11{,}0$ $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}00$, $\varphi_3 = 0°$.

Угол φ не возрастает последовательно для каждой частоты пересечения. И не становится равным степени характеристического уравнения, умноженной на π/2.

Как выглядит годограф Михайлова, показано на рис. 5.7.

Таблица данных

ω	*U*	*V*
0	10	0
5	9,5	4,4
11	7,6	0
15	5,5	–14
22,4	0	–76

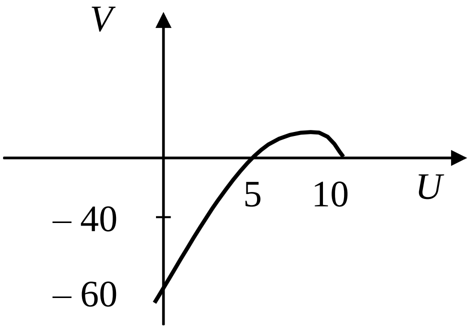

Рис. 5.7. $n = 3$

Кривая не охватывает начала координат. Система неустойчивая.

2. Содержание занятия

Задания по тематике.

Задача 1.

Разомкнутая система имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 (T_1 p + 1)}{T_1 T_2^2 p^3 + T_1 T_3 p^2 + T_1 p}.$$

Выяснить устойчивость замкнутой системы по Михайлову при $T_1 = 0{,}1$; $T_2 = 0{,}15$; $T_3 = 0{,}2$; $k_1 = 10$; $k_2 = 20$.

Задача 2.

Выяснить устойчивость системы с характеристическим уравнением второй степени

$$3p^2 + 2p + 1 = 0.$$

Задача 3.

Система с передаточной функцией

$$W(p)=\frac{5}{p^3+7p^2+3p+1}$$

замыкается. Будет ли она устойчивой?

Задача 4.

Оценить устойчивость автоматической системы по критерию Михайлова, если известен характеристический полином замкнутой системы

А) $D(p)=p^3+0{,}5p^2+12p+5$.

Б) $D(p)=p^3+2p^2+4p+10$.

С) $D(p)=p^3+10p^2+6p+2$.

В) $D(p)=2p^3+4p^2+3p+5$.

Задача 5.

Построить годограф Михайлова для системы дифференциальное уравнение которой

$$\frac{d^3y}{dt^3}+5\frac{d^2y}{dt^2}+10\frac{dy}{dt}+20y=x.$$

Сделать вывод об устойчивости.

5. Контрольные вопросы по теме занятия

5.1. Понятие об устойчивости.
5.2. Характеристическое уравнение.
5.3. Первая формулировка критерия Михайлова.
5.4. Вторая формулировка критерия Михайлова.
5.5. Третья формулировка критерия Михайлова.